ƯỚC LƯỢNG THỐNG KÊ

NỘI DUNG CHÍNH

- Ước lượng khoảng của trung bình tổng thể: biết σ
- Ước lượng khoảng của trung bình tổng thể: không biết σ
- Xác định cỡ mẫu
- Ước lượng khoảng của tỉ lệ tổng thể
- Ước lượng sự khác biệt giữa hai số trung bình
- Ước lượng sự khác biệt giữa hai tỉ lệ

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: BIẾT σ

- Ước lượng khoảng là một ước lượng của một tham số của tổng thể theo đó cung cấp một khoảng được tin là sẽ chứa giá trị của tham số
- Trường hợp cỡ mẫu lớn: $n \geq 30$
- Trường hợp cỡ mẫu nhỏ: $n < 30$

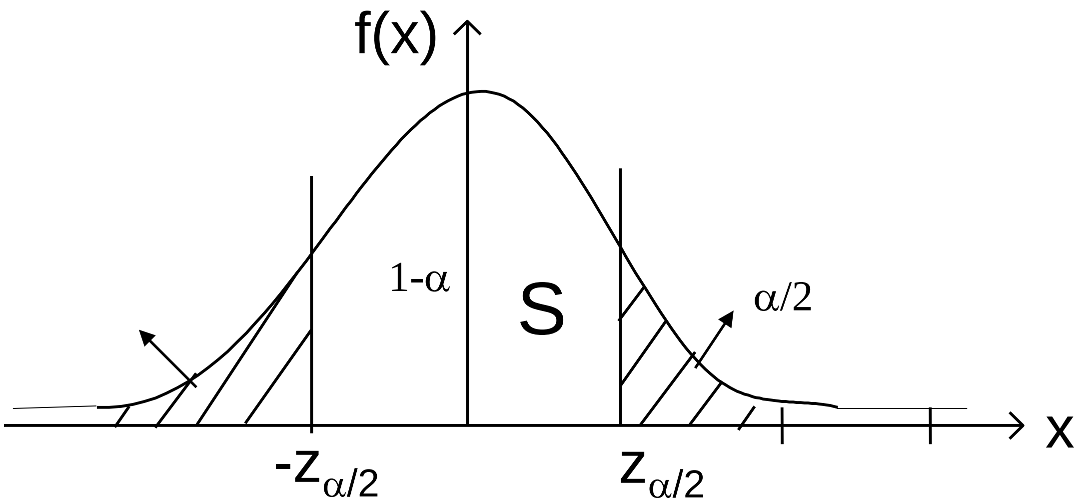
ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: BIẾT σ

- Dạng tổng quát của ước lượng khoảng là:

Ước lượng điểm ± Biên của sai số

- Biên của sai số là giá trị cộng và trừ vào ước lượng điểm để tạo ra một khoảng tin cậy
- Để tạo ra một khoảng tin cậy của μ, thì cả σ và s phải được sử dụng để tính biên của sai số

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: BIẾT σ



$$P(Z > Z\alpha/2) = \alpha/2$$

$$P(Z < -Z\alpha/2) = \alpha/2$$

$$P(-Z\alpha/2 < Z < Z\alpha/2) = 1-\alpha$$

$Z_{\alpha/2}$: là giá trị của biến phân phối chuẩn chuẩn hóa tương ứng với một diện tích $\alpha/2$ ở dưới đuôi phía trên của phân phối

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: BIẾT σ

$$P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: BIẾT σ

- Tính ước lượng khoảng: biết σ

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Với:

- (1-α) là độ tin cậy
- x là ước lượng điểm của μ
- $\pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ là biên của sai số
- Cỡ mẫu lớn (n ≥ 30) → dùng công thức này

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: BIẾT σ

CÁC GIÁ TRỊ CỦA $Z_{\alpha/2}$ ĐỐI VỚI CÁC MỨC TIN CẬY ĐƯỢC SỬ DỤNG PHỔ BIẾN NHẤT

Mức tin cậy	α	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$
90%	.10	.050	1.645
95%	.05	.0.25	1.960
99%	.01	.005	2.576

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: BIẾT σ

- Tính ước lượng khoảng: biết σ
  - Biên của sai số là giá trị cộng và trừ vào ước lượng điểm để tạo ra một khoảng tin cậy
  - Khoảng tin cậy: Một khoảng tin cậy 100(1 - α)% đối với trung bình của phân phối chuẩn μ là

$$\left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \bar{x} + Z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

VÍ DỤ

Một tổ chức nghiên cứu tiếp thị được thuê để ước lượng số trung bình lãi suất cho vay cơ bản của các ngân hàng đặt tại vùng phía tây của Hoa Kỳ. Một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 50$ ngân hàng được chọn trong nội bộ vùng này, và lãi suất cho vay cơ bản được ghi nhận cho từng ngân hàng. Trung bình và độ lệch chuẩn cho 50 lãi suất cho vay cơ bản là 8.1% và 0,24.

Hãy ước lượng số trung bình lãi suất cơ bản cho toàn khu vực, và tìm một khoảng tin cậy 95% cho số trung bình lãi suất cho vay cơ bản

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: KHÔNG BIẾT σ

- Nếu không biết σ, độ lệch chuẩn của mẫu s được dùng để ước lượng độ lệch chuẩn của tổng thể σ và khoảng tin cậy thích hợp sẽ dựa trên một phân phối xác suất được gọi là phân phối t
- Trị thống kê t:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: KHÔNG BIẾT σ

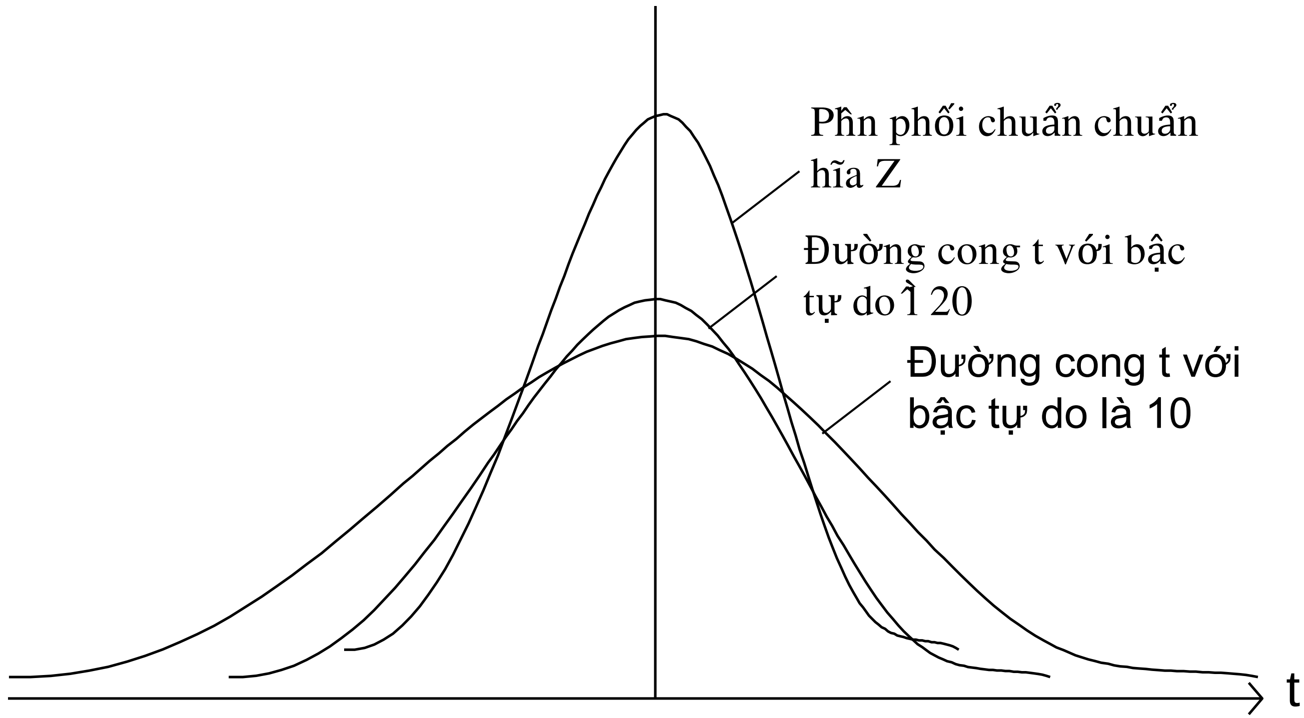
- Trị thống kê t sẽ tuân theo một Phân phối Student's t, với độ tự do d_f

$$d_f = n - 1$$

- Phân phối t thường được được dùng với phân phối cỡ mẫu nhỏ của $\bar{X}$

- If n → N then t # Z

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: KHÔNG BIẾT σ



Phn phối t

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TRUNG BÌNH TỔNG THỂ: KHÔNG BIẾT σ

- Ước lượng khoảng của một trung bình tổng thể: không biết σ

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- Cỡ mẫu nhỏ (n < 30) và tổng thể tuân theo một phân phối chuẩn hoặc gần chuẩn → cũng dùng công thức này

VÍ DỤ

Một thí nghiệm được tiến hành nhằm đánh giá một qui trính mới cho việc sản xuất kim cương tổng hợp. Sáu viên kim cương đã được tạo ra từ qui trình mới này, với trọng lượng được ghi nhận là 0.46, 0.61, 0.52, 0.48, 0.57, và 0.54 cara. Hãy tìm ước lượng khoảng tin cậy 95% cho μ, trọng lượng trung bình thực tế của các viên kim cương được sản xuất bằng qui trình này.

TỔNG KẾT CÁC THỦ TỤC ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG ĐỐI VỚI TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

Có thể giả sử độ lệch chuẩn của tổng thể σ đã biết?

Cĩ

Khơng

Dùng độ lệch chuẩn của mẫu s để ước lượng σ

Dùng

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Trường hợp biết σ

Dùng

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Trường hợp không biết σ

XÁC ĐỊNH CỠ MẪU

- Gọi E = biên của sai số kỳ vọng

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Cỡ mẫu đối với ước lượng khoảng của một trung bình của tổng thể

$$n = \frac{\left(Z_{\alpha/2}\right)^2\sigma^2}{E^2}$$

- Cỡ mẫu đối với không biết σ $n = \frac{\left(Z_{\alpha/2}\right)^2 s^2}{E^2}$

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TỈ LỆ TỔNG THỂ

$$E(\overline{p}) = p$$

$$\sigma_p = \sqrt{p(1-p)/n}$$

- Ước lượng khoảng của tỉ lệ tổng thể

$$\overline{p} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{p}}$$

hay

$$\overline{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/n}$$

VÍ DỤ

Một mẫu ngẫu nhiên gồm n = 100 nhà bán buôn mua ống nhựa polyvinyl chỉ ra cho thấy rằng 59 người có kế hoạch gia tăng việc mua hàng của mình trong năm tới. Hãy ước lượng tỷ lệ p của các nhà bán buôn trong tổng thể tất cả các nhà bán buôn ống nhựa polyvinyl mà có kế hoạch gia tăng việc mua hàng của mình trong năm tới, và tìm biên sai số ước lượng. Tìm khoảng tin cậy 95% cho p.

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CỦA TỈ LỆ TỔNG THỂ

- Xác định cỡ mẫu

  Gọi E = biên của sai số kỳ vọng

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$$

$$n = \frac{\left(Z_{\alpha/2}\right)^2 p(1-p)}{E^2}$$

ƯỚC LƯỢNG SỰ KHÁC BIỆT GIỮA HAI SỐ TRUNG BÌNH $(\mu_1 - \mu_2)$

- Ước lượng điểm của $(\mu_1 - \mu_2)$ là $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$

- Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% cho $(\mu_1 - \mu_2)$ là

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- Khi cỡ mẫu nhỏ: thay Z bằng t; thay σ bằng s với độ tự do df = (n_1-1) + (n_2-1) =(n_1 + n_2 - 2

VÍ DỤ

Nhận thức được rằng phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý của tòa án thay đổi theo thời gian, một công ty bảo hiểm muốn so sánh mức trung bình của phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý cá nhân hiện hành với mức của một năm trước đó. Một mẫu ngẫu nhiên gồm n = 30 vụ kiện được chọn lựa trong số các vụ kiện được phân xử trong từng năm trong số hai thời kỳ hàng năm này. Các số trung bình và phương sai mẫu của các phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý (tính bằng triệu đôla Mỹ) cho mỗi trong số hai năm này được cho lần lượt như sau:

VÍ DỤ

Hiện tại: Trung bình mẫu là 1.32 (triêu $)

Phương sai mẫu là 0.9734 (triệu $)^2

Trước đó: Trung bình mẫu là 1.04 (triêu $)

Phương sai mẫu là 0.7291 (triệu $)^2

Tìm một khoảng tin cậy 90% cho chênh lệch trong mức trung bình về phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý giữa năm hiện tại và năm trước đó.

ƯỚC LƯỢNG SỰ KHÁC BIỆT GIỮA HAI SỐ TRUNG BÌNH $(\mu_1 - \mu_2)$

- **Khi cỡ mẫu nhỏ, 2 tổng thể có phương sai bằng nhau ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)**
- Ước lượng điểm của $(\mu_1 - \mu_2)$ là $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$
- Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% cho $(\mu_1 - \mu_2)$ là

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm t_{\alpha/2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

ƯỚC LƯỢNG SỰ KHÁC BIỆT GIỮA HAI TỶ LỆ NHỊ THỨC (p_1 - p_2)

- Ước lượng điểm của ($p_1 - p_2$) là $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$
- Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% cho ($p_1 - p_2$) là

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

- Khi cỡ mẫu nhỏ: thay Z bằng t; thay σ bằng s với độ tự do df = (n_1-1) + (n_2-1) = n_1 + n_2 - 2

VÍ DỤ

Một công ty lớn bán lẻ quần áo đã tiến hành một nghiên cứu nhằm so sánh tính hiệu quả của quảng cáo trên báo tại mỗi trong số hai thành phố lớn. Một trang quảng cáo lớn rộ được thực hiện trên tờ báo chính tại mỗi trong số hai thành phố lớn. Ngay lập tức sau đó, một tổ chức nghiên cứu tiếp thị đã tiến hành một cuộc điều tra qua điện thoại 1000 người lớn được chọn ngẫu nhiên đang sống tại một khu vực ngoại ô có thu nhập trung bình cao tại mỗi trong số các thành phố này nhằm xác định tỷ lệ mà đã đọc trang quảng cáo của công ty bán lẻ đó. Các tỷ lệ mẫu là 0.18 và 0.14. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho sự chênh lệch trong tỷ lệ người lớn tại hai tổng thể này mà đã đọc trang quảng cáo đó.