CHƯƠNG 7

ƯỚC LƯỢNG CÁC SỐ TRUNG BÌNH VÀ TỶ LỆ

***Về chương này*:**

Như chúng ta đã phát biểu trong Chương 3, xác suất suy luận từ một tổng thể đến một mẫu. Sự suy luận thống kê, sự đảo ngược của qui trình này, luận ra bản chất của một tổng thể dựa trên thông tin chứa trong một mẫu. Chương 2 đến Chương 6 trình bày các khái niệm cơ bản về xác suất, phân phối xác suất, và phân phối xác suất (chọn mẫu) của các trị thống kê. Mục đích của chương này là để chứng minh cho các bạn thấy cách thức mà phân phối xác suất có thể được sử dụng để tạo ra những suy luận về một tổng thể từ các giá trị quan sát được của các trị thống kê mẫu. Vì thế chúng tôi trình bày một trong hai phương pháp nhằm rút ra những suy luận về các tham số tổng thể - ước lượng thống kê.

NGHIÊN CỨU ĐIỂN HÌNH

CHỌN MẪU: **IRS** SẼ CHO PHÉP ĐIỀU GÌ

Sở Thuế Nội Địa (IRS) không chỉ sử dụng việc chọn mẫu thống kê để khảo sát những khối lượng khổng lồ về dữ liệu kế toán mà còn cho phép sử dụng việc chọn mẫu thống kê và sự suy luận của các doanh nghiệp để ước lượng một số chi phí và các hạng mục nhất định khi việc có được dữ liệu chính xác là không thực tế. Viết về chủ đề này, W.L.Fell Jr. và R.S.Roussey đã trích dẫn một ví dụ về một doanh nghiệp mà đã yêu sách $6 triệu trong một năm và $3.8 trong năm kế tiếp cho khoản mục chi phí thay thế sửa chữa và các chi phí khác. (Fell 1985)[+]. Những yêu sách này được căn cứ trên các mẫu gồm 350 khoản mục cho năm đầu tiên và 520 khoản mục cho năm thứ hai. IRS không tranh cãi về việc sử dụng chọn mẫu, qui trình chọn mẫu hay qui mô mẫu, nhưng họ thực sự phản đối sự thiếu thông tin về "sai số mẫu". Phân tích dữ liệu mẫu của doanh nghiệp này, IRS kết luận rằng chi phí thực sự ắt có thể chỉ thấp khoảng $3.5 triệu và $2.8 triệu lần lượt cho năm thứ nhất và thứ hai, và vì vậy không đồng ý về $3.4 triệu trong tổng số $9.8 triệu như doanh nghiệp nọ đòi hỏi.

Ví dụ này minh chứng một trong nhiều cách thức mà việc chọn mẫu và suy luận thống kê có thể có giá trị trong việc hạch toán. Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu các ước lượng cho nhiều tham số tổng thể hữu ích, và chúng ta sẽ sử dụng phân phối xác suất cho một ước lượng để quyết định liệu một sự ước lượng gần đúng đến mức nào với một tham số tổng thể. Sau đó trong Phần 7.10, chúng ta sẽ khảo sát tính hợp lý của sự không công nhận khoản yêu sách $3.4 triệu của IRS.

7.1 TÓM LƯỢC

Sáu chương trước đã làm nền cho mục đích của chương này: một sự hiểu biết về sự suy luận thống kê và cách mà sự suy luận này có thể được áp dụng cho lời giải về các vấn đề thực tiễn. Trong Chương 1, chúng ta đã phát biểu rằng các nhà thống kê học quan tâm đến việc tạo ra những suy luận về những tổng thể của các đại lượng dựa trên thông tin chứa đựng trong các mẫu. Chúng tôi đã chứng tỏ cho các bạn thấy cách thức để thực hiện một suy luận - nghĩa là, cách thức mô tả một tập hợp các đại lượng - Chương 2. Trong Chương 3, chúng ta đã thảo luận về xác suất và cơ chế để tạo ra những suy luận, và chúng ta đã tiếp theo việc này với một thảo luận chung về những phân phối xác suất - các phân phối xác suất rời rạc trong Chương 4 và những phân phối xác suất liên tục trong Chương 5.

Trong Chương 6, chúng ta đã lưu ý rằng các trị thống kê, những con số định lượng được tính từ các đại lượng mẫu, được sử dụng để tạo ra những suy luận về các tham số tổng thể, và chúng ta đã tìm ra một cách sử dụng quan trọng của phân phối xác suất trong Chương 5. Đặc biệt là, các bạn đã biết rằng một số các trị thống kê quan trọng - trung bình và tỷ lệ mẫu - có những phân phối xác suất mà có thể được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn khi các cỡ mẫu là lớn, nhờ vào Định lý Giới hạn Trung tâm. Những trị thống kê này bây giờ sẽ được sử dụng để tạo ra các suy luận về những tham số tổng thể, và các phân phối xác suất của chúng sẽ cung cấp một phương tiện để đánh giá độ tin cậy của những suy luận này.

[+]

7.2 CÁC LOẠI ƯỚC LƯỢNG

Các qui trình ước lượng có thể được chia thành hai loại, ước lượng điểm và ước lượng khoảng. Giả sử rằng một đại lý xe Oldsmobile muốn ước lượng lợi nhuận trung bình của mỗi thương vụ bán một chiếc xe mới. Sự ước lượng này có thể có kết quả là một con số duy nhất, ví dụ như là $935, hoặc chúng ta có thể ước lượng rằng lợi nhuận trung bình một thương vụ bán hàng sẽ rơi vào khoảng từ $835 đến $1035. Loại hình ước lượng thứ nhất này được gọi là **ước lượng điểm** bởi vì con số duy nhất này đại diện cho số ước lượng mà có thể đi cùng với một điểm trên một đường thẳng. Loại hình thứ hai, có liên quan đến hai điểm và xác định một khoảng trên một đường thẳng, được gọi là **ước lượng khoảng.** Chúng ta sẽ nghiên cứu từng phương pháp ước lượng này.

Nhằm xây dựng hoặc một sự ước lượng điểm hay một sự ước lượng khoảng, chúng ta sử dụng thông tin từ mẫu dưới hình thức của một số ước lượng. Các số ước lượng là những hàm số của các quan sát mẫu và vì thế, theo định nghĩa, cũng là **những trị thống kê.**

ĐỊNH NGHĨA Một **ước lượng** là một qui luật mà cho chúng ta biết về cách thức tính toán một sự ước lượng dựa trên thông tin trong một mẫu và thường được thể hiện như là một công thức.

Ví dụ, số trung bình mẫu

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

là một ước lượng của số trung bình tổng thể μ và giải thích chính xác cách thức mà giá trị bằng số thực sự của sự ước lượng này có thể đạt được một khi các giá trị mẫu $x_1.x_2,....,x_n$ được biết. Số trung bình mẫu này có thể được sử dụng để đi đến một con số duy nhất nhằm ước lượng μ hay xây dựng một khoảng, hai điểm mà được dự định dùng để bao quanh giá trị đúng của μ.

ĐỊNH NGHĨA Một **ước lượng điểm** của một tham số tổng thể là một qui luật mà cho chúng ta biết về cách thức tính toán một con số duy nhất dựa trên dữ liệu mẫu. Con số tạo ra được gọi là một **ước lượng điểm**.

ĐỊNH NGHĨA Một **ước lượng khoảng** của một tham số tổng thể là một qui luật mà cho chúng ta biết về cách thức tính toán hai con số dựa trên dữ liệu mẫu. Cặp số này được gọi là một **ước lượng khoảng** hay **khoảng tin cậy**.

Cả hai qui trình ước lượng điểm và khoảng được phát triển bằng cách sử dụng phân phối mẫu của số ước lượng tốt nhất của một tham số tổng thể đã được xác định. Ngoài ra, nhiều trị thống kê khác có thể được xây dựng để ước lượng cùng tham số này. Ví dụ, nếu chúng ta lấy mẫu n = 5 đại lượng, 2, 7, 0, 1, và 4, từ một tổng thể đối xứng, thì chúng ta có thể ước lượng số trung bình tổng thể này bằng cách sử dụng số trung bình mẫu.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{14}{5} = 2.8$$

bằng cách sử dụng số trung vị mẫu m = 2, hay thậm chí bằng cách sử dụng số bình quân của các đại lượng lớn nhất và nhỏ nhất trong mẫu, (0 + 7)/2 = 3.5. Bằng cách nào mà chúng ta có thể đánh giá những đặc trưng của các số ước lượng này, so sánh số này với số khác, và cuối cùng quyết định số nào là "tốt nhất"?

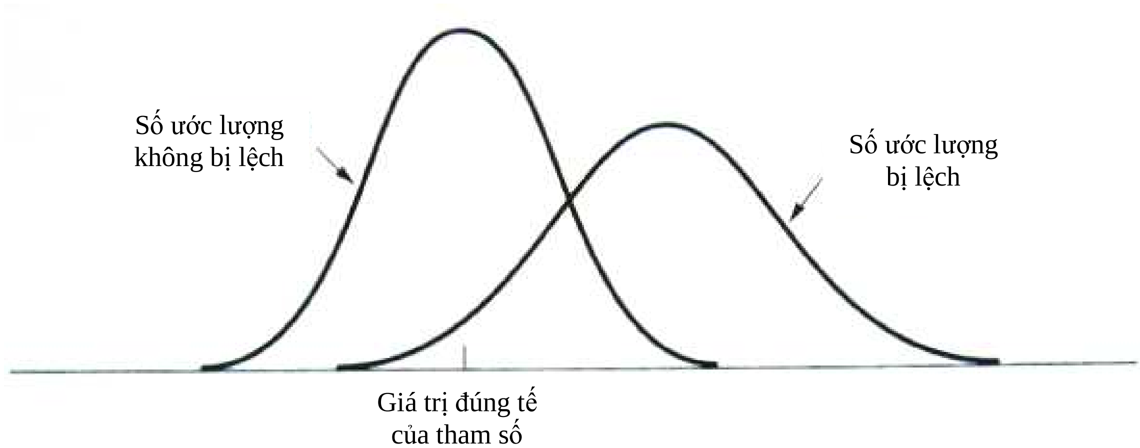
Mức độ tốt của một số ước lượng được đánh giá bằng cách quan sát hành vi của nó trong sự chọn mẫu lặp lại. Chúng ta hãy xem xét sự giống nhau sau đây. Trên nhiều khía cạnh, thì sự ước lượng điểm là tương tự với việc bắn một khẩu súng ngắn ổ quay vào một mục tiêu. Số ước lượng, mà tạo ra những sự ước lượng, là tương tự với khẩu súng ngắn ổ quay; một sự ước lượng cụ thể là giống với viên đạn; và tham số quan tâm là tương tự như điểm đen. Chọn ra một mẫu từ một tổng thể và ước tính giá trị của tham số đó là tương tự với việc bắn một phát súng duy nhất vào mục tiêu.

Giả sử rằng một người đàn ông bắn một phát súng duy nhất vào một mục tiêu và phát súng đó đã trúng ngay điểm đen. Trong khi đây là một kỳ tích đáng ngưỡng mộ, thì liệu chúng ta có thể kết luận rằng ông ta là một xạ thủ cừ khôi? Câu trả lời là không - không một ai trong số chúng ta ắt sẽ bằng lòng giữ mục tiêu đó trong khi phát súng thứ hai được bắn đi. Đến khi nào mà sự chính xác của ông ta đã được quan sát thấy trong **những lần bắn được lặp đi lặp lại,** với tất cả phát súng đều trúng vào gần điểm đen, thì chúng ta ắt mới có thể tuyên bố rằng ông ta là một tay súng giỏi.

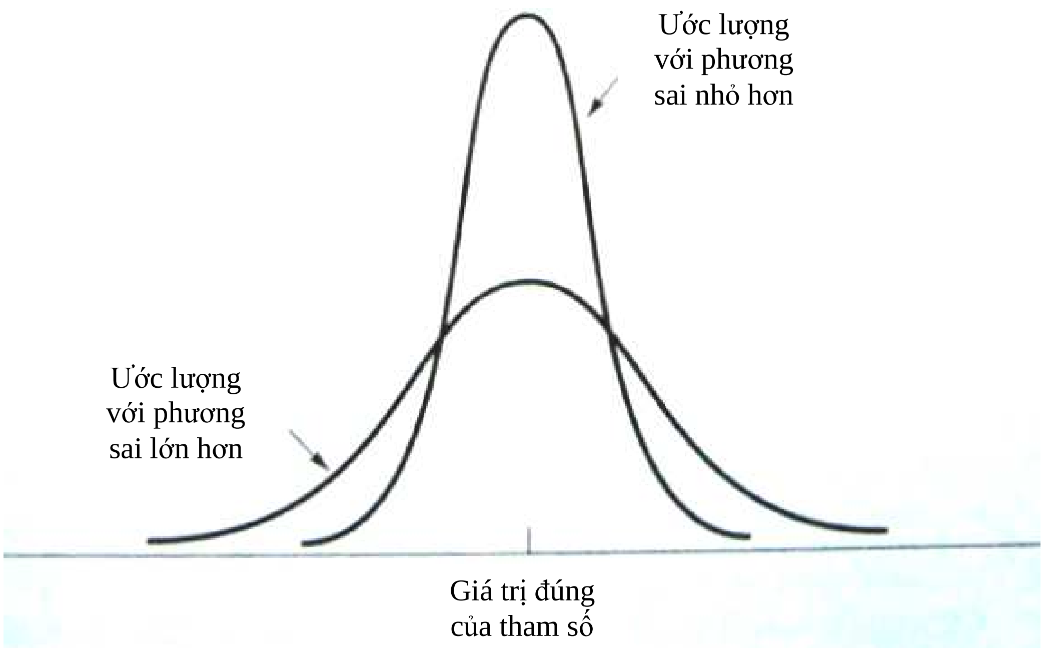
Giả sử rằng chúng ta xem xét một số ước lượng của một tham số tổng thể ví dụ như μ, σ, hay p. Một số đặc trưng đáng mong muốn của một số ước lượng là gì? Về cơ bản, có hai đặc trưng, và chúng có thể được thấy bằng cách quan sát những phân phối mẫu được cho trong các Hình 7.1 và 7.2.

Thứ nhất, chúng ta ắt sẽ muốn sự phân phối mẫu này được tập trung ở trung tâm qua giá trị thật của tham số này. **Như thế, chúng ta ắt sẽ muốn số trung bình của phân phối mẫu này bằng với giá trị đúng của tham số đó.** Một số ước lượng như thế được gọi là **không bị lệch.**

HÌNH **7.1** Những phân phối cho các ước lượng bị lệch và không bị lệch



HÌNH **7.2** So sánh sự biến đổi của ước lượng



ĐỊNH NGHĨA Một ước lượng của một tham số được cho là **không bị lệch** nếu số trung bình của phân phối của ước lượng này là bằng với giá trị đúng của tham số đó. Nếu không thì ước lượng đó được cho là **bị lệch.**

Các phân phối mẫu cho một số ước lượng không bị lệch và một số ước lượng bị lệch được trình bày trong Hình 7.1. Phân phối mẫu cho ước lượng bị lệch trong Hình 7.1 bị dịch chuyển sang phía bên phải của giá trị đúng của tham số. Ước lượng bị lệch này có khả năng xảy ra nhiều hơn là ước lượng không bị lệch trong việc ước tính quá mức giá trị của tham số.

Đặc trưng thứ hai đáng mong ước của một ước lượng là rằng **khoảng rộng (được đo bằng phương sai) của phân phối mẫu phải càng nhỏ càng tốt.** Điều này đảm bảo rằng, với một xác suất cao, một sự ước lượng riêng lẻ sẽ rơi gần vào giá trị đúng của tham số. Các phân phối mẫu cho hai ước lượng không bị lệch, một với phương sai nhỏ[+] và ước lượng kia với một phương sai lớn hơn, được trình bày trong Hình 7.2. Đương nhiên là chúng ta ắt sẽ thích ước lượng với phương sai nhỏ hơn bởi vì những sự ước lượng có xu hướng nằm gần với giá trị đúng của tham số hơn là với phương sai lớn hơn.

Trong những tình trạng chọn mẫu trong cuộc sống thật, bạn có thể biết rằng phân phối mẫu của một ước lượng điểm tập trung quanh tham số mà bạn đang cố gắng ước lượng, nhưng tất cả những thứ mà bạn có là ước lượng được tính từ *n* đại lượng được chứa trong mẫu. Sự ước lượng của bạn sẽ nằm cách giá trị đúng của tham số này xa chừng nào? Khoảng cách giữa con số ước lượng và giá trị đúng của tham số được gọi là **sai số ước lượng** và cung cấp một đại lượng về mức độ tốt của ước lượng điểm.

ĐỊNH NGHĨA Khoảng cách giữa một con số ước lượng và tham số được ước lượng được gọi là **sai số ước lượng.**

[+] Các nhà thống kê thường sử dụng thuật ngữ *phương sai của một số ước lượng* khi thực tế họ ám chỉ phương sai của phân phối mẫu của số ước lượng đó. Thành ngữ rút gọn này được sử dụng hầu như phổ biến.

Mức độ tốt của một ước lượng khoảng được phân tích giống phần lớn cách thức mà người ta phân tích số ước lượng điểm. Những mẫu có cùng cỡ được chọn ra lặp đi lặp lại từ một tổng thể, và sự ước lượng khoảng được tính toán cho từng lần chọn mẫu. Qui trình này sẽ tạo ra một số lượng lớn các khoảng hơn là các điểm. **Một ước lượng điểm tốt ắt sẽ bao quanh một cách thành công giá trị đúng của tham số trong phần lớn thời gian.** "Tỷ lệ thành công" được xem như là **hệ số tin cậy** và cung cấp một đại lượng về mức độ tốt của số ước lượng khoảng.

ĐỊNH NGHĨA Xác suất mà một khoảng tin cậy sẽ bao quanh tham số được ước lượng được gọi là **hệ số tin cậy.**

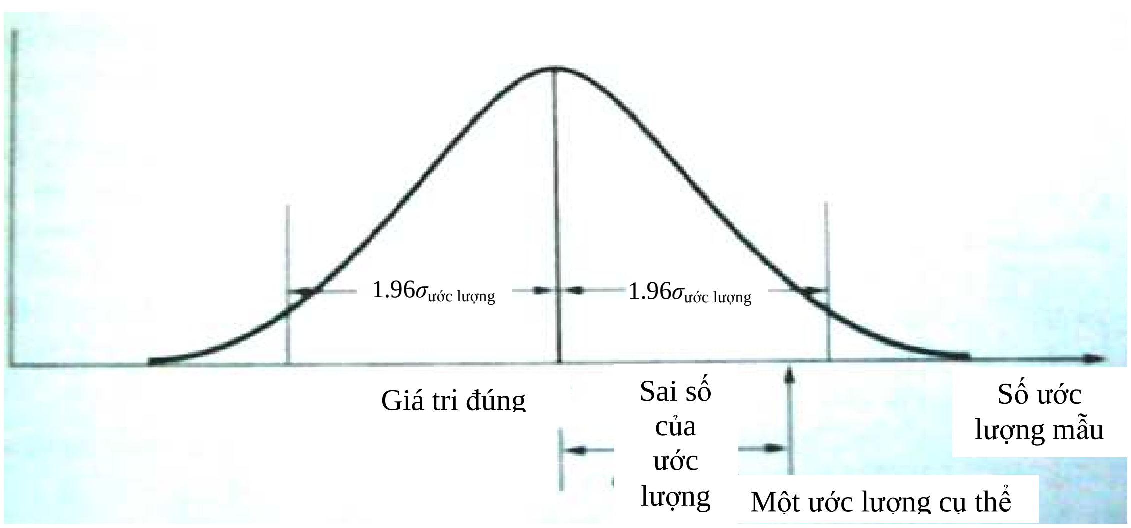
Sự chọn lựa ước lượng "tốt nhất" - công thức phù hợp để sử dụng trong việc tính toán những sự ước lượng - có liên quan đến sự so sánh các phương pháp ước lượng khác nhau. Đây là nhiệm vụ của nhà thống kê lý thuyết và vượt khỏi phạm vi của chương này. Xuyên suốt phần còn lại của chương này và các chương tiếp theo, những tổng thể và tham số quan tâm sẽ được định nghĩa và ước lượng thích hợp được trình bày cùng với một đại lượng về mức độ tốt của nó.

7.3 SỰ ƯỚC LƯỢNG CHO MẪU LỚN

Ước lượng Điểm

Giả định rằng chúng ta có một ước lượng *không bị lệch* mà phân phối mẫu của nó là chuẩn hay có thể được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn. Chúng ta biết rằng 95% các giá trị của số ước lượng này sẽ rơi vào bên trong 1.96 lần độ lệch chuẩn của số trung bình của nó, tham số mà ta quan tâm. Như thế, **sai số ước lượng,** được định nghĩa bằng sự khác biệt giữa một sự ước lượng điểm cụ thể với tham số mà nó ước lượng được, phải nhỏ hơn 1.96 lần độ lệch chuẩn của số ước lượng đó với xác xuất xấp xỉ bằng với 0.95. (Tham khảo Hình 7.3). Đại lượng này tạo ra một giới hạn đối với sai số ước lượng mà thường được gọi là **biên sai số ước lượng**. Mặc dù có 5% cơ may rằng sai số ước lượng này sẽ vượt quá biên sai số, thì điều này có rất ít khả năng xảy ra.

HÌNH **7.3** Phân phối mẫu của một ước lượng không bị lệch



Ước lượng Điểm cho một Tham số Tổng thể

ước lượng điểm: một trị thống kê tính toán được bằng cách sử dụng các đại lượng mẫu

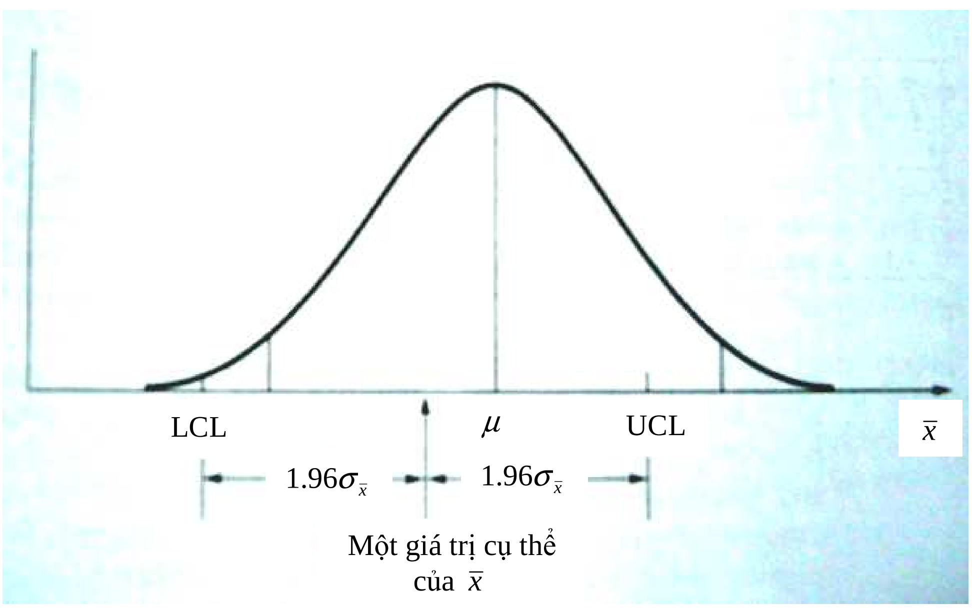
Biên sai số: 1.96 x độ lệch chuẩn của số ước lượng này

Ước lượng Khoảng

Khi xây dựng một ước lượng khoảng cho một tham số, chúng ta xác định hai điểm mà bên trong khoảng đó chúng ta mong đợi giá trị của tham số chưa biết đó rơi vào. Những ước lượng khoảng được xây dựng để cho khi chọn mẫu lặp lại thì một tỷ lệ lớn (gần với 1) của các khoảng này sẽ bao quanh tham số quan tâm. Tỷ lệ này được gọi là **hệ số tin cậy,** và khoảng tạo ra được gọi là **khoảng tin cậy.** Ví dụ, khi ước tính một số trung bình tổng thể với một khoảng tin cậy, thì chúng ta nói về "xác suất mà khoảng đó bao quanh μ," chứ không phải "xác suất mà μ rơi vào khoảng đó," bởi vì giá trị của μ được cố định nhưng khoảng thì chứa các điểm cuối ngẫu nhiên.

Một khoảng tin cậy mẫu lớn dựa trên một số ước lượng không bị lệch được phân phối chuẩn hay xấp xỉ chuẩn có được bằng cách đo 1.96 x (độ lệch chuẩn của số ước lượng này) về bất cứ phía nào của số ước lượng điểm đó. Bởi vì chúng ta biết rằng 95% các ước lượng điểm sẽ nằm trong 1.96 lần độ lệch chuẩn của số trung bình tổng thể, cho nên 95% các khoảng được lập nên theo cách này phải bao quanh số trung bình tổng thể đó. Một khoảng sẽ thất bại trong việc bao quanh số trung bình đó chỉ nếu khi số ước lượng điểm này nằm xa hơn 1.96 lần độ lệch chuẩn tính từ số trung bình, và điều này sẽ xảy ra với xác suất 0.05. Hình 7.4 cho thấy cách thức mà điều này vận hành khi $\bar{x}$ được sử dụng như là một số ước lượng của μ.

HÌNH **7.4** Các giới hạn độ tin cậy 95% của một số trung bình tổng thể



Nói chung, chúng ta có thể thay đổi hệ số tin cậy bằng cách thay đổi giá trị của $z_{0.25} = 1.96$. Nếu chúng ta mong muốn có một hệ số tin cậy bằng với $1-\alpha$, thì chúng ta chọn giá trị $z_{\alpha/2}$ mà có $\alpha/2$ ở đoạn trên của phân phối chuẩn chuẩn hóa. Giá trị này có thể được tìm thấy trong Bảng 3 của Phụ lục II.

Khi cỡ mẫu là lớn và một số ước lượng được phân phối chuẩn hay phân phối xấp xỉ chuẩn, thì một sự ước lượng khoảng tin cậy (1 - α) 100% cho một tham số tổng thể chưa biết được thể hiện trong phần trình bày sau.

Một Khoảng Tin cậy Mẫu Lớn (1 - α) 100%

(Số ước lượng điểm) ± $z_{\alpha/2}$ x (Sai số chuẩn của số ước lượng)

trong đó $z_{\alpha/2}$ là giá trị *z* tương ứng với một diện tích $\alpha/2$ ở đoạn trên của phân phối chuẩn chuẩn hóa. Công thức này tạo ra hai giá trị, **giới hạn tin cậy thấp (LCL)** và **giới hạn tin cậy cao (UCL).**

Một số khoảng tin cậy phổ biến, hệ số tin cậy, và giá trị *z* của chúng được cho trong Bảng 7.1

BẢNG **7.1** Các giới hạn tin cậy cho sự ước lượng khoảng cho mẫu lớn

Khoảng Tin cậy	α	$z_{\alpha/2}$
0.90	0.10	1.645
0.95	0.05	1.96
0.99	0.01	2.58

Xuyên suốt phần còn lại của chương này, các bạn sẽ thấy cách thức mà các công thức chung cho sự ước lượng điểm và khoảng cho mẫu lớn áp dụng cho những tổng thể và tham số cụ thể được quan tâm. Các bạn cũng sẽ học hỏi về cách thức điều chỉnh những công thức chung này khi các cỡ mẫu là không lớn.

7.4 SỰ ƯỚC LƯỢNG CHO MẪU LỚN VỀ SỐ TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

Những vấn đề thực tiễn rất thường dẫn đến sự ước lượng về một số trung bình tổng thể μ. Chúng ta có lẽ quan tâm đến điểm số trung bình của các sinh viên theo học Thạc sĩ Quản trị Kinh doanh (MBA) tại một trường đại học cụ thể, đến sức chịu lực trung bình của một loại thép mới, đến con số trung bình của số người chết bình quân đầu người trong một giai cấp xã hội đã biết, hay đến nhu cầu trung bình đối với một sản phẩm mới. Nhiều số ước lượng là sẵn có cho việc ước lượng số trung bình tổng thể μ, bao gồm số trung vị mẫu, số trung bình của các đại lượng lớn nhất và nhỏ nhất trong mẫu, và số trung bình mẫu $\bar{x}$. Mỗi số ước lượng ắt sẽ có một phân phối mẫu và, tùy thuộc vào tổng thể và vấn đề thực tiễn có liên quan, mà có các ưu thế hay bất lợi nhất định. Mặc dù số trung vị mẫu và trung bình của các giá trị cao nhất và thấp nhất của mẫu là dễ tính toán hơn, thì số trung bình mẫu $\bar{x}$ thường ưu việt hơn ở chổ, đối với một số tổng thể, thì phương sai của nó là tối thiểu và, không quan tâm đến tổng thể, thì luôn luôn không bị lệch.

Phân phối mẫu của số trung bình mẫu $\bar{x}$, mà được thảo luận trong Phần 6.3, có bốn đặc trưng quan trọng:

- Phân phối mẫu của $\bar{x}$ sẽ *xấp xỉ chuẩn* mà không quan tâm đến phân phối xác suất của tổng thể được chọn mẫu khi *n* là lớn.
- Nếu tổng thể được chọn mẫu là chuẩn, thì phân phối mẫu của $\bar{x}$ sẽ chính xác *chuẩn*.

- *Số trung bình* của phân phối mẫu của $\bar{x}$ sẽ luôn luôn bằng với μ. Vì thế $\bar{x}$ là một số ước lượng không bị lệch của μ.
- Độ lệch chuẩn của phân phối mẫu của $\bar{x}$, còn được gọi là *độ lệch chuẩn của số trung bình*, là $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Số ước lượng $\bar{x}$ thỏa mãn tất cả các điều kiện được trình bày trong Phần 6.3, vì vậy các công thức chung có thể được áp dụng cho sự ước lượng điểm và khoảng.

Số Ước lượng Điểm của một số Trung bình Tổng thể μ

Số ước lượng điểm: $\bar{x}$

Biên sai số: $1.96\sigma_{\bar{x}} = 1.96\sigma/\sqrt{n}$

Một Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% cho Mẫu Lớn đối với một số Trung bình Tổng thể μ

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

trong đó $z_{\alpha/2}$ là giá trị *z* tương ứng với một diện tích nằm ở đoạn trên của phân phối *z* chuẩn chuẩn hóa.

n = cỡ mẫu

σ = độ lệch chuẩn của tổng thể được chọn mẫu

Nếu σ là chưa được biết, thì đại lượng này có thể được ước lượng xấp xỉ bằng độ lệch chuẩn của mẫu *s* khi cỡ mẫu là lớn.[+]

Giả định: $n \geq 30$.

VÍ DỤ **7.1** Một tổ chức nghiên cứu tiếp thị được thuê để ước lượng số trung bình lãi suất cho vay cơ bản của các ngân hàng đặt tại vùng phía tây của Hoa Kỳ. Một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 50$ ngân hàng được chọn trong nội bộ vùng này, và lãi suất cơ bản được ghi nhận cho từng ngân hàng. Trung bình và độ lệch chuẩn cho 50 lãi suất cơ bản là

$$\bar{x} = 8.1\% \quad \text{và} \quad s = 0.24$$

Hãy ước lượng số trung bình lãi suất cơ bản cho toàn khu vực, và tìm biên sai số đi cùng với ước lương đó.

Lời giải Ước lượng của số trung bình lãi suất cơ bản là $\bar{x} = 8.1\%$. Biên sai số là

$$1.96\sigma_{\bar{x}} = 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{50}}$$

Mặc dù σ là chưa được biết, thì cỡ mẫu là lớn, và chúng ta có thể ước lượng xấp xỉ giá trị của σ bằng cách sử dụng *s*. Như vậy, biên sai số là xấp xỉ bằng

$$1.96\frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96\frac{0.24}{\sqrt{50}} = 0.0665 \approx 0.07$$

[+] Khi chúng ta chọn mẫu một phân phối chuẩn, thì trị thống kê $(x-\mu)/(s/\sqrt{n})$ có một phân phối *t*, mà được thảo luận trong Phần 7.5. Khi cỡ mẫu là lớn, thì trị thống kê này được phân phối xấp xỉ chuẩn bất luận là tổng thể được chọn mẫu có chuẩn hay không chuẩn.

Chúng ta có thể cảm thấy khá tin tưởng rằng ước lượng của chúng ta về 8.1% là nằm trong 0.07% của số trung bình đúng của lãi suất cơ bản.

VÍ DỤ **7.2** Tìm một khoảng tin cậy 90% cho số trung bình tỷ lệ cho vay cơ bản được thảo luận trong Ví dụ 7.1

Lời giải Khoảng tin cậy 90% của số trung bình tỷ lệ cho vay cơ bản μ là

$$\bar{x} \pm z_{0.05}\sigma_{\bar{x}}$$

hoặc

$$\bar{x} \pm 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Thay thế $\bar{x} = 8.1\%$ và n = 50 và sử dụng s = 0.24% để ước lượng xấp xỉ σ, chúng ta có được

$$8.1 \pm (1.645)\frac{0.24}{\sqrt{50}}$$

hay

$$8.1 \pm 0.0558$$

Như vậy, chúng ta ước lượng số trung bình của lãi suất cho vay cơ bản nhằm đâu đó giữa 8.0442% và 8.1558%.

Liệu chúng ta có thể nói rằng khoảng cụ thể này bao quanh μ không? Không, nhưng chúng ta khá tin tưởng về việc này, bởi vì các khoảng được lập nên theo cách này bao quanh μ trong 90% thời gian.

Đối với một cỡ mẫu cố định, bề rộng của khoảng tin cậy tăng lên khi hệ số tin cậy gia tăng, một kết quả mà đồng ý với trực giác của chúng ta. Chắc hẳn là nếu chúng ta mong muốn tin tưởng hơn rằng khoảng này sẽ bao quanh μ, thì chúng ta ắt sẽ tăng bề rộng của khoảng. Bởi vì chúng ta ưa thích các khoảng tin cậy hẹp và hệ số tin cậy lớn hơn, nên chúng ta phải đạt được một sự thỏa hiệp trong việc lựa chọn hệ số tin cậy.

Lựa chọn hệ số tin cậy được sử dụng trong một tình huống cho trước được thực hiện bởi người làm thí nghiệm và tùy thuộc vào mức độ tin cậy mà người làm thí nghiệm mong muốn đặt ra trong ước lượng này. Phần lớn các khoảng tin cậy được lập nên bằng cách sử dụng một trong ba hệ số tin cậy được trình bày trong Bảng 7.1. Hệ số tin cậy phổ biến nhất có lẽ là các khoảng tin cậy 95%. Việc sử dụng các khoảng tin cậy 99% là ít phổ biến hơn bởi vì bề rộng khoảng lớn hơn được tạo ra. Dĩ nhiên, lúc nào các bạn cũng có thể giảm bớt bề rộng này bằng cách gia tăng cỡ mẫu *n*.

Ngoài các khoảng tin cậy hai phía (mà chúng ta đơn giản gọi là các khoảng tin cậy), chúng ta cũng có thể xây dựng **các khoảng tin cậy một phía** cho những tham số. Một **khoảng tin cậy một phía thấp** cho một tham số cho chúng ta một giới hạn tin cậy thấp (LCL) nằm phía trên mức mà tham số được kỳ vọng nằm trong đó. Một **khoảng tin cậy một phía cao** sẽ ước lượng tham số này thấp hơn một giới hạn tin cậy cao (UCL) nào đó. Giá trị z được sử dụng cho khoảng tin cậy một phía (1 - α) 100%, z_α, đặt α vào một đầu duy nhất của phân phối chuẩn. Các giới hạn tin cậy một phía cao và thấp (1 - α) 100% đối với một tham số tổng thể *khi cỡ mẫu là lớn* là

$$\text{LCL} = (\text{số ước lượng điểm}) - z_\alpha \text{ x } (\text{độ lệch chuẩn của số ước lượng})$$

và

$$\text{UCL} = (\text{số ước lượng điểm}) + z_\alpha \text{ x } (\text{độ lệch chuẩn của số ước lượng})$$

VÍ DỤ **7.3** Một công ty lên kế hoạch cho việc phát hành kỳ phiếu ngắn hạn và hy vọng rằng lãi suất mà công ty phải trả không vượt quá 11.5%. Để có được một số thông tin về lãi suất trung bình mà công ty đó có thể kỳ vọng chi trả, thì doanh nghiệp này đã đưa ra thị trường 40 kỳ phiếu, mỗi kỳ phiếu thông qua 40 công ty môi giới. Số trung bình và độ lệch chuẩn cho 40 lãi suất là $\bar{x} = 10.3\%$ và $s = 0.31\%$. Bởi vì công ty này chỉ quan tâm đến giới hạn cao đối với lãi suất mà công ty phải chi trả, hãy tìm một khoảng tin cậy 95% một phía cho lãi suất trung bình mà công ty đó sẽ phải chi trả cho các kỳ phiếu.

Lời giải Bởi vì hệ số tin cậy là 0.95, $\alpha = 0.05$ và $z_{0.05} = 1.645$. Do vậy, khoảng tin cậy 95% một phía cho μ là

$$\bar{x} + z_{0.05}\sigma_{\bar{x}}$$

hoặc

$$\bar{x} + 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Thay thế $\bar{x} = 10.3$, $n = 40$, và $s = 0.31$ để ước lượng σ, chúng ta có được khoảng tin cậy một phía

$$\text{UCL} = 10.3 + (1.645)\frac{0.31}{\sqrt{40}}$$

hay

$$\text{UCL} = 10.3 + 0.0806 = 10.3806$$

Vì thế, chúng ta ước lượng rằng lãi suất trung bình mà doanh nghiệp đó sẽ phải chi trả cho các kỳ phiếu của mình là thấp hơn 10.3806%. Chúng ta tin tưởng thế nào về kết luận này? Chúng ta khá tin tưởng, bởi vì ta biết rằng các khoảng được lập ra theo cách này bao quanh μ trong 95% thời gian.

Bài tập

Các Kỹ thuật Cơ bản

7.1 Giải thích "biên sai số ước lượng" nghĩa là gì.

7.2 Tìm biên sai số ước lượng một số trung bình tổng thể μ cho:

a $n = 40, \sigma^2 = 4$ **b** $n = 100, \sigma^2 = 0.9$

c $n = 50, \sigma^2 = 12$

7.3 Tìm biên sai số ước lượng một số trung bình tổng thể μ cho:

a $n = 50, \sigma = 0.1$ **b** $n = 100, \sigma = 0.9$

c $n = 100, \sigma = 0.01$

7.4 Tìm khoảng tin cậy 95% cho một trung bình tổng thể μ cho:

a $n = 36, \bar{x} = 13.1, s^2 = 3.42$ **b** $n = 64, \bar{x} = 2.73, s^2 = 0.1047$

c $n = 41, \bar{x} = 28.6, s^2 = 1.09$

7.5 Tìm khoảng tin cậy 90% cho một trung bình tổng thể μ cho:

a $n = 125, \bar{x} = 0.84, s^2 = 0.086$ **b** $n = 50, \bar{x} = 21.9, s^2 = 3.44$

c $n = 46, \bar{x} = 907, s^2 = 128$

7.6 Tìm một khoảng tin cậy (1 - α) 100% cho một trung bình tổng thể µ cho:

a $\alpha = 0.1, n = 38, \bar{x} = 34, s^2 = 12$ **b** $\alpha = 0.10, n = 65, \bar{x} = 1049, s^2 = 51$

c $\alpha = 0.05, n = 89, \bar{x} = 66.3, s^2 = 2.48$

7.7 Một mẫu ngẫu nhiên gồm *n* đại lượng được chọn từ một tổng thể với số trung bình chưa được biết μ và độ lệch chuẩn đã biết $\sigma = 10$. Hãy tính bề rộng của khoảng tin cậy 95% cho μ cho các giá trị sau đây của *n*.

a $n = 100$ **b** $n = 200$

c $n = 400$

7.8 So sánh các khoảng tin cậy trong Bài tập 7.7. Ảnh hưởng lên bề rộng của một khoảng tin cậy trong các điều kiện dưới đây là như thế nào.

a. Bạn nhân đôi cỡ mẫu

b. Bạn nhân bốn cỡ mẫu

7.9 Tham chiếu lại Bài tập 7.7.

a. Tính toán bề rộng của khoảng tin cậy 90% cho μ khi $n = 100$.

b. Tính toán bề rộng của khoảng tin cậy 99% cho μ khi $n = 100$.

c. So sánh bề rộng của các khoảng tin cậy 90%, 95% và 99% cho μ. Việc gia tăng hệ số tin cậy sẽ có tác động thế nào đến bề rộng của khoảng tin cậy?

Các Ứng dụng

7.10 Một sự gia tăng tỷ lệ tiết kiệm của người tiêu dùng thường được gắn chặt với sự thiếu tin tưởng vào nền kinh tế và được cho là một chỉ báo về một xu hướng suy thoái trong nền kinh tế. Chọn mẫu ngẫu nhiên $n = 200$ tài khoản tiết kiệm tại một cộng đồng địa phương cho thấy một sự gia tăng trung bình trong tài khoản tiết kiệm là 7.2% trong vòng 12 tháng qua và một độ lệch chuẩn là 5.65. Ước lượng sự gia tăng tỷ lệ phần trăm trung bình trong các giá trị tài khoản tiết kiệm trong 12 tháng qua đối với những người gởi tiền trong cộng đồng này. Hãy tính biên sai số ước lượng.

7.11 Phần lớn những yêu cầu thanh toán về bảo hiểm y tế tại một công ty nhỏ nằm trong khoảng $800, nhưng một số ít yêu cầu là rất lớn. Kết quả là, sự phân phối các yêu cầu thanh toán này là lệch rất nhiều sang phía bên phải và có một độ lệch chuẩn σ bằng với $2000. 40 yêu cầu thanh toán đầu tiên nhận được trong tháng này có một số trung bình $\bar{x}$ bằng với $930. Giả sử rằng chúng ta phải xem nhóm 40 yêu cầu thanh toán này như là một mẫu ngẫu nhiên từ một tổng thể là tất cả những yêu cầu thanh toán có thể có, và sử dụng $\bar{x}$ để ước tính số trung bình tổng thể μ.

a. Biên sai số ước lượng là bao nhiêu?

b. Liệu bạn có thể thực hiện một phát biểu chính xác về xác suất để cho biên sai số này sẽ thấp hơn biên trong phần (a) hay không? Hãy giải thích.

7.12 Trong bài báo về sự lựa chọn một chuyên ngành đại học, Jake Batsell (1994) báo cáo rằng phần lớn các nhà tư vấn học thuật khuyến khích sinh viên thực hiện quyết định của mình ở khoảng giữa năm thứ hai đại học. Một nhân tố mà thường xuất hiện trong quyết định này là mức lương khởi đầu cho các công việc đi cùng với những chuyên ngành khác nhau. Các lĩnh vực nóng được ghi nhận là Khoa học Máy tính và Kỹ sư Hóa, với tiền lương bình quân lần lượt là $41,800 và $39,400. Tiền lương bình quân cho các chuyên ngành khác được quan tâm được liệt kê dưới đây.

Chuyên ngành	**Tiền lương Khởi đầu Bình quân**
Quản trị Nhân sự	$32,600
Kế toán	28,600
Quản trị Tài chính	26,700
Tiếp thị/Bán hàng	24,100
Truyền thông	22,909
Bán lẻ	22,500
Quảng cáo	21,400

Chúng ta sẽ giả định rằng những mức tiền lương bình quân này được dựa trên các mẫu có cỡ là 100.

a. Nếu độ lệch chuẩn cho Quản trị Nhân sự là $1000, hãy tìm sự ước lượng khoảng tin cậy 95% cho tiền lương khởi đầu bình quân thực tế cho các chuyên ngành về Quản trị Nhân sự.

b. Tìm một sự ước lượng điểm cho tiền lương khởi đầu bình quân thực tế cho các chuyên ngành Tiếp thị/Bán hàng nếu độ lệch chuẩn là $800. Biên sai số đi cùng với sự ước lượng này là bao nhiêu?

c. Xây dựng một khoảng tin cậy 98% cho tiền lương khởi đầu bình quân thực tế đối với các chuyên ngành Truyền thông nếu độ lệch chuẩn là σ = $800.

7.13 Nếu bạn thuê một căn hộ và bạn nghĩ rằng tiền thuê của mình là quá cao, một phần tiền thuê nhà mà bạn đang trả có thể do lãi suất cao đối với tiền đi vay. Lãi suất cơ bản vào ngày 1 tháng Chín tới đây là bao nhiêu? Một mẫu ngẫu nhiên gồm n = 32 nhà dự báo kinh tế cho ra một số trung bình $\bar{x} = 11.7\%$ và độ lệch chuẩn s = 2.1%. Nếu như những dự báo của các nhà dự báo này là "không bị lệch" - nghĩa là, nếu số trung bình của tổng thể các dự báo của tất cả các nhà dự báo kinh tế sẽ bằng với lãi suất thực tế vào mùa thu kế đến - hãy tìm khoảng tin cậy 90% cho lãi suất cơ bản vào ngày 1 tháng Chín.

7.14 Một nhân viên nhân sự của một công ty muốn ước lượng thời gian trung bình giữa những lần xảy ra tai nạn nhân sự mà có thể tạo ra tiềm năng cho các vụ kiện tụng pháp lý. Một mẫu ngẫu nhiên gồm n = 30 tại nạn từ hồ sơ lưu trữ của công ty đó vào thời gian x giữa một tai nạn và tai nạn trước đó cho chúng ta một số trung bình mẫu là $\bar{x} = 42.1$ ngày và độ lệch chuẩn s = 19.6 ngày. Hãy tìm khoảng tin cậy 90% cho thời gian trung bình giữa những lần xảy ra tai nạn nhân sự mà có tiềm năng gây ra các vụ kiện tụng pháp lý.

7.15 Một sự chọn mẫu ngẫu nhiên chi phí hoạt động hàng tháng của một công ty cho một mẫu gồm n = 36 tháng tạo ra một số trung bình mẫu là $5474 và một độ lệch chuẩn là $764. Hãy tìm khoảng tin cậy 90% một phía có giá trị cao cho chi phí hoạt động trung bình hàng tháng của công ty đó.

7.5 SỰ ƯỚC LƯỢNG CHO MẪU NHỎ VỀ SỐ TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

Qui trình cho mẫu lớn về việc ước lượng một số trung bình tổng thể mà chúng ta đã thảo luận trong Phần 7.4 được dựa trên hai sự kiện. Thứ nhất, khi cỡ mẫu là lớn, thì phân phối của số trung bình mẫu có phân phối chuẩn với số trung bình μ và độ lệch chuẩn $\sigma/\sqrt{n}$, hay xấp xỉ như vậy do Định lý Giới hạn Trung tâm. Thứ hai, khi giá trị của độ lệch chuẩn tổng thể σ là chưa được biết và cỡ mẫu là lớn, thì độ lệch chuẩn của mẫu s có thể được sử dụng như một số ước lượng đáng tin cậy cho σ trong công thức $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Tuy nhiên, những sự giới hạn chi phí, hạn chế thời gian, là những nhân tố khác thường làm hạn chế cỡ của mẫu mà có thể được lựa chọn để cho các qui trình mẫu lớn không áp dụng được. Khi cỡ mẫu là nhỏ, thì phân phối mẫu của $\bar{x}$ là biến thiên lớn hơn nhiều so với một số ước lượng của $\sigma/\sqrt{n}$.

Khi tổng thể được chọn mẫu có một *phân phối chuẩn* và *σ được biết,* thì số trung bình mẫu $\bar{x}$ có một phân phối chuẩn với số trung bình μ và độ lệch chuẩn $\sigma/\sqrt{n}$, và trị thống kê:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

có một phân phối chuẩn chuẩn hóa cho tất cả các cỡ mẫu. Bây giờ ta có thể nói điều gì về phân phối của trị thống kê

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

khi σ là chưa được biết và n là nhỏ?

Phân phối của trị thống kê này

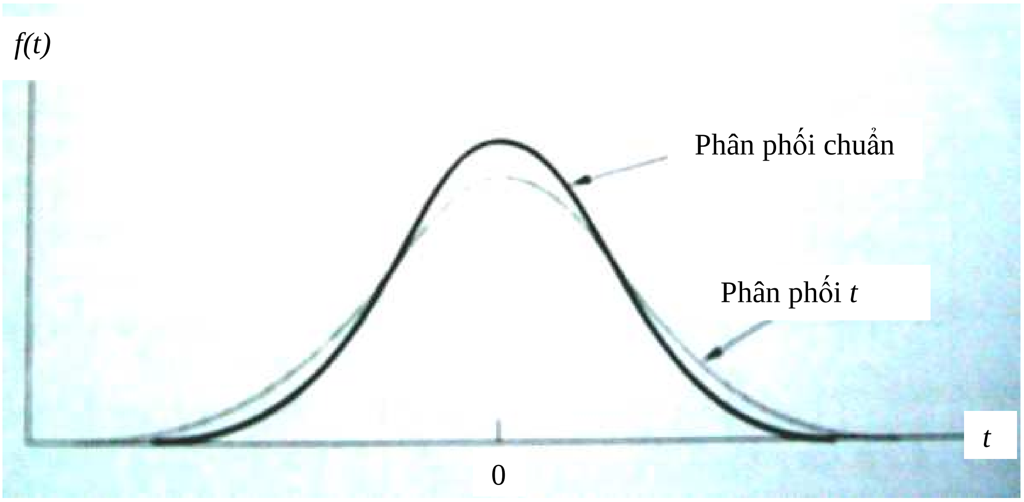
$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

cho các mẫu được chọn ra từ một tổng thể phân phối chuẩn được phát hiện bởi W. S. Gosset và xuất bản (1908) dưới bút danh Student. Ông ám chỉ đại lượng đang nghiên cứu là *t.* và từ đó đại lượng này được gọi là ***t Student.*** Chúng ta bỏ qua biểu thức toán học phức tạp về hàm mật độ của t nhưng mô tả một số đặc trưng của nó.

Phân phối mẫu của trị thống kê kiểm định t, được gọi là một **phân phối *t,*** giống như z, có hình dạng gò và hoàn toàn đối xứng qua $t = 0$. Tuy nhiên, đại lượng này biến thiên lớn hơn nhiều so với z, nhỏ dần đi một cách nhanh chóng về phía bên phải và bên trái, một hiện tượng mà có thể được giải thích một cách sẵn sàng. Độ biến thiên của z trong việc chọn mẫu lặp lại chỉ do bởi $\bar{x}$; các đại lượng khác xuất hiện trong z (n, μ, và σ) là không phải ngẫu nhiên. Trái lại, độ biến thiên của t được đóng góp bởi *hai* đại lượng ngẫu nhiên, $\bar{x}$ và s, mà có thể được chứng minh là độc lập với nhau. Vì thế khi $\bar{x}$ là rất lớn, thì s có thể rất nhỏ, và ngược lại. Kết quả là, t sẽ biến thiên nhiều hơn so với z trong việc chọn mẫu lặp lại (xem Hình 7.5). Cuối cùng, như chúng ta có lẽ phỏng đoán, độ biến thiên của t giảm đi khi n tăng lên bởi vì s, sự ước lượng của σ, sẽ được căn cứ trên ngày càng nhiều thông tin. Khi n là vô cùng lớn, thì phân phối của t và z sẽ là đồng nhất. Vì thế Gosset phát hiện ra rằng phân phối của t phụ thuộc vào cỡ mẫu n.

Ước số của tổng các bình phương của độ lệch, (n - 1) mà xuất hiện trong công thức cho s^2 được gọi là số **bậc tự do** (d.f) đi cùng với s^2 và với trị thống kê t. Thuật ngữ *bậc tự do* được liên tưởng với lý thuyết thống kê nền tảng của phân phối xác suất của s^2 và liên quan đến số lượng các độ lệch bình phương độc lập sẵn có cho việc ước lượng σ^2.

HÌNH **7.5** *z* chuẩn chuẩn hóa và một phân phối *t* dựa trên *n* = 6 đại lượng (5 d.f)

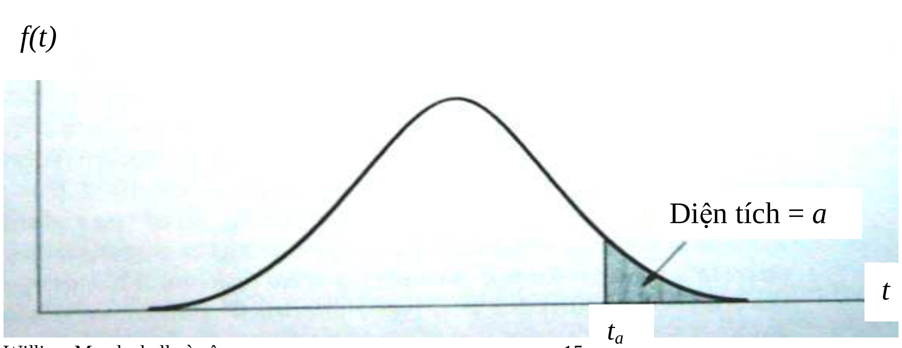


Các giá trị của *t* có những diện tích được định rõ về phía bên phải của chúng được trình bày trong Bảng 4 của Phụ lục II. Bảng 4 được sao chép một phần trong Bảng 7.2. Giá trị trong bảng t_a ghi lại giá trị của *t* để cho một diện tích *a* nằm về phía bên phải của nó, như đã thấy trong Hình 7.6. Bậc tự do đi cùng với *t*, d.f., được thể hiện trong các cột đầu tiên và cuối cùng của bảng (xem Bảng 7.2), và t_a tương ứng với các giá trị khác nhau của *a* xuất hiện ở dòng đầu tiên. Vì thế, nếu chúng ta muốn tìm giá trị của *t* để cho 5% của diện tích nằm về phía bên phải của nó, thì chúng ta sử dụng cột có nhãn là $t_{0.05}$. Ví dụ, giá trị của $t_{0.05}$ khi *n* = 6, được tìm thấy trong cột $t_{0.05}$ đối qua bậc tự do d.f. = (*n* - 1) = (6 - 1) = 5, và *t* = 2.015 (được đóng khung trong Bảng 7.2).

Lưu ý rằng đối với một diện tích có đoạn cuối cố định, thì giá trị đoạn cuối phía bên phải của *t* sẽ luôn luôn lớn hơn giá trị tương ứng đoạn cuối phía bên phải của *z*. Ví dụ, khi α = 0.05, thì giá trị đoạn cuối phía bên phải của *t* cho *n* = 2 (d.f. = *n* -1 = 1) là 6.314, rất lớn so với giá trị tương ứng $z_{0.05}$ = 1.645. Dò xuống cột $t_{0.05}$, chúng ta lưu ý rằng các giá trị của *t* giảm đi, qua đó phản ánh tác động của một cỡ mẫu lớn hơn (nhiều bậc tự do hơn) lên sự ước lượng của σ. Cuối cùng, khi *n* là vô cùng lớn, thì giá trị của $t_{0.05}$ bằng với $z_{0.05}$ = 1.645.

Lý do chọn *n* = 30 (một chọn lựa tùy ý) làm đường phân chia giữa các mẫu lớn và nhỏ bây giờ đã rất rõ ràng. Khi *n* = 30 (d.f. = 29), thì giá trị đoạn cuối phía bên phải của $t_{0.05}$ = 1.699 về mặt số học rất gần với $z_{0.05}$ là 1.645. Với *a* = 0.035 ở đoạn cuối bên phải và *n* = 30, thì giá trị đoạn cuối phía bên phải của *t* là 2.045, mà rất gần với giá trị của $z_{0.025}$= 1.96.

HÌNH **7.6** Các giá trị trong bảng của *t* Student



BẢNG **7.2** Định dạng của bảng *t* Student, Bảng 4 trong Phụ lục II

d.f.	$t_{0.100}$	$t_{0.050}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	d.f.
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4,604	4
5	1.476	$\boxed{2.015}$	2.571	3.365	4,032	5
6	1.440	1,943	2.447	3.143	3,707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

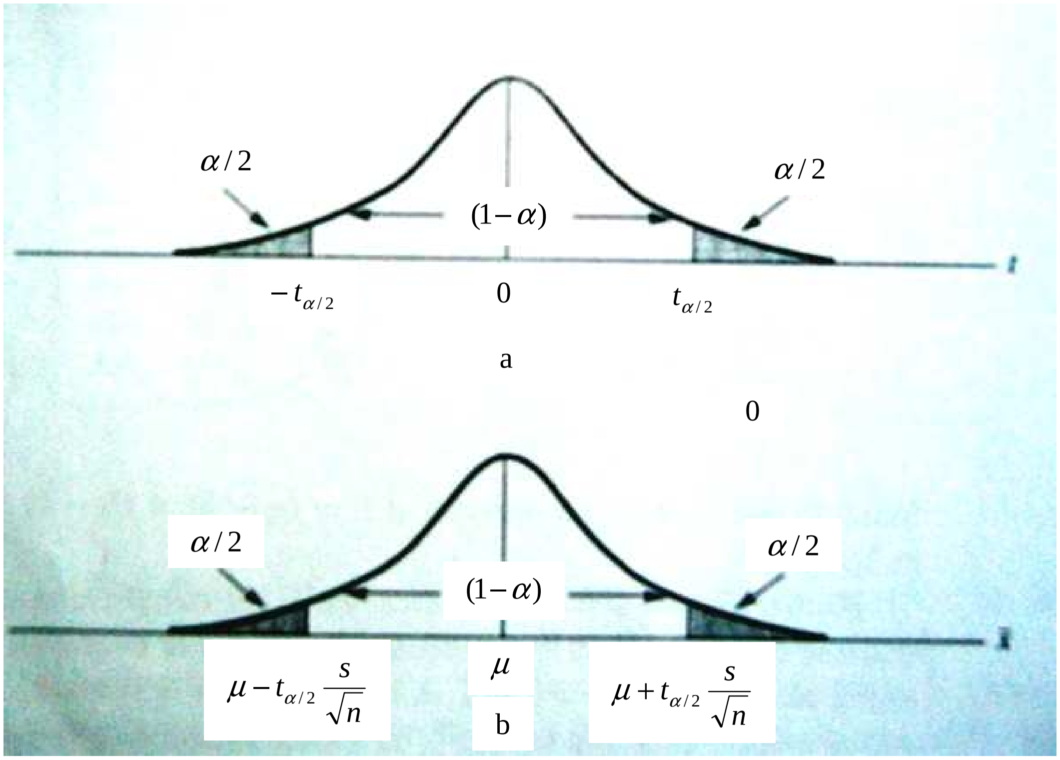
Lưu ý rằng *t* Student và các giá trị trong bảng tương ứng được căn cứ trên giả định rằng **tổng thể được chọn mẫu có một phân phối xác suất chuẩn.** Điều này dường như là một giả định rất nghiêm ngặt, bởi vì trong nhiều tình huống chọn mẫu, thì các đặc trưng của tổng thể là hoàn toàn chưa được biết và rất có thể là không chuẩn. Nếu tính không chuẩn của tổng thể ảnh hưởng nghiêm trọng đến sự phân phối của trị thống kê *t*, thì việc áp dụng số kiểm tra *t* ắt sẽ rất hạn chế. May mắn là người ta có thể chứng minh rằng sự phân phối của trị thống kê *t* gần như có cùng hình dạng với sự phân phối theo lý thuyết của *t* cho các tổng thể mà không chuẩn nhưng sở hữu một sự phân phối xác suất có hình dạng gò. Đặc trưng này của trị thống kê *t* và sự xảy ra phổ biến của các phân phối có hình dạng gò của dữ liệu trong tự nhiên đã làm gia tăng giá trị của *t* Student khi sử dụng cho việc suy luận thống kê.

Khi xây dựng một số ước lượng khoảng tin cậy của μ dựa trên phân phối *t*, chúng ta đơn giản thay thế giá trị trong bảng của *z* bằng giá trị trong bảng tương ứng của *t*. Tính hợp lý được sử dụng để lập nên số ước lượng khoảng cho mẫu lớn của μ là áp dụng được, ngoại trừ rằng sự phân phối được ám chỉ là *t* thay vì là *z*. Trong Hình 7.7(a), (1 - α) 100% của các giá trị của *t* nằm bên trong khoảng $(-t_{\alpha/2}, t_{\alpha/2})$; tương tự như vậy, trong Hình 7.7(b), (1 - α) 100% của các giá trị của biến số ngẫu nhiên $\bar{x}$ nằm bên trong $t_{\alpha/2}$, các độ lệch chuẩn được ước lượng của giá trị đúng của μ. Vì vậy, có một xác suất (1 - α) rằng ước lượng khoảng

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

sẽ bao quanh giá trị đúng của μ.

HÌNH **7.7** Các phân phối mẫu của (a) $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ và (b) $\bar{x}$



Ước lượng Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% của số Trung bình μ

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

trong đó *s* là độ lệch chuẩn của mẫu, $s/\sqrt{n}$ là độ lệch chuẩn *được ước lượng* của $\bar{x}$, và *t* có (*n* - 1) d.f.

Giả định: Mẫu *được chọn ngẫu nhiên* từ một tổng thể mà có *phân phối chuẩn* (hay xấp xỉ như vậy)

VÍ DỤ **7.4** Một thí nghiệm được tiến hành nhằm đánh giá một qui trính mới cho việc sản xuất kim cương tổng hợp. Sáu viên kim cương đã được tạo ra từ qui trình mới này, với trọng lượng được ghi nhận là 0.46, 0.61, 0.52, 0.48, 0.57, và 0.54 cara. Hãy tìm ước lượng khoảng tin cậy 95% cho μ, trọng lượng trung bình thực tế của các viên kim cương được sản xuất bằng qui trình này.

Lời giải Sử dụng các phương pháp của Chương 2, các bạn có thể kiểm định rằng số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu cho sáu trọng lượng này là

$$\bar{x} = 0.53 \quad \text{và} \quad s = 0.0559$$

Giá trị trong bảng của *t* với 0.025 ở đoạn cuối phía bên phải, dựa trên *n* - 1 = 6 - 1 = 5 bậc tự do, được tìm thấy trong Bảng 4 của Phụ lục II là

$$t_{0.025} = 2.571$$

Thay thế các giá trị này vào công thức tính số ước lượng khoảng tin cậy cho ra

$$\bar{x} \pm t_{0.025}\frac{s}{\sqrt{n}} = 0.53 \pm (2.571)\frac{0.0559}{\sqrt{6}}$$

hay

$$0.53 \pm 0.59$$

Ước lượng khoảng cho μ vì vậy sẽ từ 0.471 đến 0.589 với hệ số tin cậy bằng với 0.95. Nếu người làm thí nghiệm muốn phát hiện một sự gia tăng nhỏ trong trọng lượng trung bình của kim cương vượt quá 0.5 cara, thì bề rộng của khoảng phải được giảm bớt bằng cách có được nhiều hơn các đại lượng về trọng lượng kim cương. Gia tăng cỡ mẫu sẽ làm giảm cả $1/\sqrt{n}$ lẫn $t_{\alpha/2}$ và vì vậy làm giảm bề rộng của khoảng.

Bài tập

Các Kỹ thuật Cơ bản

7.16 Tìm giá trị của t

a $t_{0.05}$ cho 5 bậc tự do (d.f.) **b** $t_{0.025}$ cho 8 d.f.

c $t_{0.10}$ cho 18 d.f. **d** $t_{0.025}$ cho 30 d.f.

7.17 Tìm t_a khi biết rằng $P(t > t_a) = a$.

a a = 0.10, 12 d.f. **b** a = 0.01, 25 d.f.

c a = 0.05, 16 d.f.

7.18 Một mẫu ngẫu nhiên gồm n = 6 quan sát từ một tổng thể có phân phối chuẩn tạo ra dữ liệu sau đây: 6.2, 5.8, 7.1, 6.3, 6.9, và 5.7.

a. Tính $\bar{x}$ và s cho dữ liệu.

b. Tìm khoảng tin cậy 90% cho trung bình tổng thể μ.

c. Tìm khoảng tin cậy 95% cho trung bình tổng thể μ. So sánh bề rộng của khoảng này với khoảng được tính trong câu (b).

7.19 Mười hai quan sát được chọn ngẫu nhiên từ một tổng thể chuẩn, tạo ra $\bar{x} = 125.12$ và s = 12.3.

a. Tìm khoảng tin cậy 98% cho trung bình tổng thể μ.

b. Tìm khoảng tin cậy 99% cho trung bình tổng thể μ.

c. Giải thích các khoảng tìm ra trong các câu (a) và (b).

Các Ứng dụng

7.20 Với lãi suất thế chấp nhà cửa đang ở xu thế đi lên chậm và một lãi suất trung bình phổ biến là 8.7%, một ngân hàng quyết định điều tra kỳ vọng về lãi suất thế chấp của những người nộp hồ sơ thế chấp nhà tại ngân hàng của họ. Một mẫu ngẫu nhiên gồm mười người nộp hồ sơ gần đây nhất đã tìm thấy rằng trung bình của những kỳ vọng lãi suất của những người nộp hồ sơ thế chấp nhà mong muốn thương lượng là 8.5%. Mười kỳ vọng lãi suất riêng lẻ này thay đổi từ mức thấp là 8% đến mức cao là 8.95, với độ lệch chuẩn bằng 0.23%.

a. Nếu phân phối của các lãi suất thế chấp nhà cửa được giả định là xấp xỉ phân phối chuẩn tắc, hãy tìm khoảng tin cậy 90% cho kỳ vọng lãi suất trung bình của những người nộp hồ sơ vay thế chấp nhà ở của ngân hàng. Giải thích khoảng này.

b. Liệu khoảng được tạo ra trong câu (a) có chứa lãi suất trung bình 8.7% mà phổ biến trong khu vực thị trường của ngân hàng này? Liệu điều này sẽ dẫn bạn đến việc tin rằng kỳ vọng lãi suất thế chấp trung bình của những người nộp hồ sơ vay thế chấp tại ngân hàng này là thấp hơn lãi suất trung bình phổ biến 8.7% hay không? Giải thích.

7.21 Các biến phí, chủ yếu là lao động, khiến cho lợi nhuận trong việc xây nhà thay đổi từ đơn vị nhà ở này sang đơn vị nhà ở khác. Một công ty xây dựng nhà ống tiêu chuẩn cần làm ra một mức lợi nhuận bình quân vượt quá $8500 mỗi căn nhà nhằm đạt được mục tiêu lợi nhuận hàng năm. Các khoản lợi nhuận tính trên mỗi căn nhà cho năm đơn vị nhà gần đây nhất của công ty xây dựng này là $8760, $6370, $9620, $8200, và $10,350.

a. Tìm khoảng tin cậy 95% cho lợi nhuận trung bình một đơn vị nhà ở của công ty xây dựng này. Giải thích khoảng này.

b. Liệu khoảng được tạo ra trong câu (a) có chứa $8500 hay không? Liệu bạn có kết luận rằng công ty xây dựng này đang hoạt động ở mức lợi nhuận mong muốn?

7.22 Giá trung bình tính bằng đôla cho số n = 21 tivi 27 inch được đề cập trong Bài tập 6.41 ("Xếp hạng: tivi 27 inch", 1994) được cho trong bảng sau:

380	590	585
670	699	530
560	430	610
565	705	475
565	580	405
385	465	425
390	450	390

a. Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của những giá cả này.

b. Xây dựng một khoảng tin cậy 99% cho giá cả bình quân chung của 21 nhãn hiệu/mẫu tivi 27 inch này, không bao gồm mẫu Sony KV-27XBR26.

c. Nếu giá cả bình quân của tivi Sony, $1085, được thêm vào, thì bạn ước lượng của bạn trong câu (b) sẽ thay đổi ra sao?

d. Liệu giá cả bình quân của tivi Sony có thể được xem như là một quan sát nằm ngoài?

7.23 Bảng sau đây liệt kê sự tăng trưởng tỷ lệ phần trăm trong thu nhập cá nhân bình quân đầu người cho 11 vùng đô thị từ năm 1988 đến 2000, như dự báo của Bộ Thương mại Hoa Kỳ.

Vùng đô thị	**Tăng trưởng Tỷ lệ Phần trăm Thu nhập Bình quân Đầu người**
Anaheim	13.6
Atlanta	14.2
Cleveland	17.2
Detroit	15.3
Fort Lauderdale, FL	16.0
Jacksonville, FL	16.2
New Orleans	18.7
New York	15.3
Pittsburgh	15.8
San Diego	13.8

Seattle 15.5

Nguồn: Bộ Thương mại Hoa Kỳ, *The Press Enterprise,* 12 tháng Mười, 1990, trang 5.

a. Nếu những dự báo này tượng trưng cho một mẫu ngẫu nhiên về những dự báo tăng trưởng cho tất cả các vùng đô thị tại Hoa Kỳ, hãy tìm khoảng tin cậy 98% cho tăng trưởng phần trăm trung bình được dự báo về thu nhập cá nhân bình quân đầu người cho tất cả các vùng đô thị tại Hoa Kỳ trong giai đoạn 1988-2000. (Tổng thể của tăng trưởng phần trăm về thu nhập cá nhân bình quân đầu người được giả định là có phân phối xấp xỉ chuẩn.)

b. Liệu có khả năng xảy ra rằng tăng trưởng phần trăm trung bình dự báo trong câu (a) sẽ bằng với tăng trưởng phần trăm trung bình trên thực tế trong năm 2000 hay không? Giải thích.

7.6 ƯỚC LƯỢNG SỰ KHÁC BIỆT GIỮA HAI SỐ TRUNG BÌNH

Một vấn đề có tầm quan trọng không kém cho việc ước lượng các số trung bình tổng thể là sự so sánh giữa hai số trung bình tổng thể. Ví dụ, chúng ta có lẽ mong muốn ước lượng sự khác biệt giữa hai tiểu bang trong qui mô trung bình của yêu cầu thanh toán đối với một loại hình bảo hiểm xe cộ. Ước lượng này sẽ được căn cứ trên các mẫu ngẫu nhiên độc lập của các yêu cầu thanh toán được chọn lựa trong số những yêu cầu được lưu hồ sơ tại hai tiểu bang này. Hoặc chúng ta có lẽ mong muốn so sánh suất sinh lợi bình quân trong một nhà máy hóa chất sử dụng nguyên vật liệu thô được cung cấp bởi hai nhà cung ứng, A và B. Các mẫu của suất sinh lợi hàng ngày, cho mỗi trong số hai nhà cung ứng này, sẽ được ghi nhận và sử dụng để tạo ra những suy luận có liên quan đến sự khác biệt trong suất sinh lợi trung bình.

Đối với mỗi trong số các mẫu này thì có hai tổng thể, tổng thể thứ nhất với trung bình và phương sai μ_1 và σ_1^2 và tổng thể thứ hai với trung bình và phương sai μ_2 và σ_2^2. Một mẫu ngẫu nhiên gồm n_1 đại lượng được chọn ra từ tổng thể 1 và n_2 từ tổng thể 2, mà ở đó các mẫu được giả định là đã được rút một cách độc lập với nhau. Cuối cùng, các ước lượng về những tham số tổng thể được tính toán từ dữ liệu mẫu bằng cách sử dụng số ước lượng $\bar{x}_1, s_1^2, \bar{x}_2,$ và s_2^2.

Một cách trực quan, thì sự khác biệt giữa hai số trung bình mẫu này sẽ tạo ra một thông tin tối đa về sự khác biệt thực sự giữa hai số trung bình tổng thể, và trên thực tế điều này xảy ra đúng như vậy. Ước lượng điểm tốt nhất của chênh lệch $(\mu_1 - \mu_2)$ giữa các số trung bình tổng thể là $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$. Phân phối mẫu của ước lượng này thì không khó để suy ra, nhưng chúng ta khẳng định việc này tại đây mà không có chứng cứ.

Các Đặc trưng của Phân phối Mẫu của $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$, sự Khác biệt giữa Hai số Trung bình Mẫu

Khi các mẫu ngẫu nhiên độc lập gồm n_1 và n_2 quan sát được chọn lựa từ các tổng thể với các số trung bình μ_1 và μ_2 và phương sai σ_1^2 và σ_2^2, thì phân phối mẫu của chênh lệch $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ sẽ có các đặc trưng sau:

1. Trung bình và độ lệch chuẩn[+] của $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ sẽ là:

[+] Các nhân tố hiệu chỉnh tổng thể hữu hạn có thể được đòi hỏi nếu N_1 và N_2 là nhỏ và n_1/N_1 và n_2/N_2 là lớn hơn 0.05.

$$\mu_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)} = \mu_1 - \mu_2$$

và

$$\sigma_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

2. Nếu các tổng thể được chọn mẫu có *phân phối chuẩn,* thì phân phối mẫu của $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ *được phân phối chính xác chuẩn*, mà không quan tâm đến cỡ mẫu.

3. Nếu các tổng thể được chọn mẫu không được *phân phối chuẩn*, thì phân phối mẫu của $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ *được phân phối xấp xỉ chuẩn* khi n_1 và n_2 là lớn, do Định lý Giới hạn Trung tâm.

Do $(\mu_1 - \mu_2)$ là số trung bình của phân phối mẫu, cho nên $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ là một số ước lượng không bị lệch của $(\mu_1 - \mu_2)$. Như thế, khi các cỡ mẫu là lớn, thì những công thức chung của Phần 7.3 có thể được sử dụng để lập nên những ước lượng điểm và khoảng.

Ước lượng Điểm của $(\mu_1 - \mu_2)$

Trị ước lượng: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$

Biên sai số: $1.96\sigma_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)} = 1.96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Một Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% cho $(\mu_1 - \mu_2)$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Nếu σ_1^2 và σ_2^2 là chưa được biết, thì hai đại lượng này có thể được ước lượng xấp xỉ bởi các phương sai mẫu s_1^2 và s_2^2.

Giả định: Cả n_1 lẫn n_2 đều lớn hơn hay bằng với 30.

VÍ DỤ **7.5** Nhận thức được rằng phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý của tòa án thay đổi theo thời gian, một công ty bảo hiểm muốn so sánh mức trung bình của phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý cá nhân hiện hành với mức của một năm trước đó. Một mẫu ngẫu nhiên gồm *n* = 30 vụ kiện được chọn lựa trong số các vụ kiện được phân xử trong từng năm trong số hai thời kỳ hàng năm này. Các số trung bình và phương sai mẫu của các phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý (tính bằng triệu đôla Mỹ) cho mỗi trong số hai năm này được cho trong Bảng 7.4.

a. Hãy tìm một ước lượng điểm cho chênh lệch trong mức trung bình về phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý giữa năm hiện tại và năm trước đó. Cho biết biên sai số.

b. Tìm một khoảng tin cậy 90% cho chênh lệch trong mức trung bình về phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý giữa năm hiện tại và năm trước đó.

BẢNG **7.3** Các số trung bình và phương sai mẫu cho Ví dụ 7.5

Năm	Cỡ Mẫu	Trung bình Mẫu (triệu $)	Phương sai Mẫu (triệu $)^2
Hiện tại	$n_1 = 30$	$\bar{x}_1 = 1.32$	$s_1^2 = 0.9734$
Trước đó	$n_2 = 30$	$\bar{x}_2 = 1.04$	$s_2^2 = 0.7291$

Lời giải a Ước lượng điểm cho $\mu_1 - \mu_2$ là

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.32 - 1.04 = 0.28$$

với biên sai số được cho bởi

$$1.96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \approx 1.96\sqrt{\frac{0.9734}{30} + \frac{0.7291}{30}} = 1.96(0.2382) = 0.47$$

b Bởi vì chúng ta mong muốn tìm khoảng tin cậy 90% cho $(\mu_1 - \mu_2)$, (1 - α) = 0.90. α = 0.10. α/2 = 0.05 và $z_{0.05}$ = 1.645. Khoảng tin cậy là:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$(1.32 - 1.04) \pm 1.645\sqrt{\frac{0.9734}{30} + \frac{0.7291}{30}}$$

$$0.28 \pm 0.392$$

Làm tròn hai số thập phân, chúng ta ước lượng chênh lệch trong phần thưởng cho việc thi hành nghĩa vụ pháp lý sẽ rơi vào khoảng -$110,000 đến $670,000. Bạn có thể thấy rằng khoảng tin cậy này là rất rộng, qua đó cho phép những xác suất rằng phần thưởng trung bình trong năm nay ắt có thể là lớn hơn $670,000 hay thấp hơn $110,000 so với năm trước. Nếu công ty bảo hiểm này muốn ước lượng chênh lệch trong phần thưởng trung bình với một khoảng tin cậy hẹp hơn, thì công ty đó sẽ phải có được nhiều thông tin hơn bằng cách gia tăng các cỡ mẫu n_1 và n_2.

Sự suy luận cho mẫu nhỏ về chênh lệch giữa các số trung bình tổng thể được căn cứ vào giả định rằng *cả hai tổng thể đều được phân phối chuẩn* và, hơn nữa, rằng chúng sở hữu *các phương sai bằng nhau* - nghĩa là, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Với trường hợp đặc biệt này, ước lượng khoảng tin cậy cho mẫu lớn được căn cứ trên trị thống kê

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

mà với $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ được giản lược thành

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

Đối với sự suy luận cho mẫu nhỏ, việc sử dụng trị thống kê sau đây tỏ ra hợp lý

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

trong đó chúng ta thay thế một độ lệch chuẩn mẫu *s* cho độ lệch chuẩn tổng thể *σ*. Đủ làm ta ngạc nhiên, trị thống kê này có một phân phối *t* Student khi các giả định đã nói rõ được thỏa mãn.

Ước lượng *s* được sử dụng trong trị thống kê *t* có thể hoặc là s_1 hoặc là s_2, các độ lệch chuẩn cho hai mẫu, mặc dù sự sử dụng đại lượng này hay đại lượng kia ắt sẽ là lãng phí bởi vì cả hai đều ước lượng ra *s*. Bởi vì chúng ta muốn có được sự ước lượng tốt nhất có thể có, việc sử dụng một số ước lượng mà tổng hợp được thông tin từ cả hai mẫu tỏ ra hợp lý. **Số ước lượng chung này của σ^2,** sử dụng tổng các bình phương của các độ lệch chuẩn đối với số trung bình của cả hai mẫu, được thể hiện trong phần trình bày sau.

Ước lượng Chung của σ^2

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)}{n_1 + n_2 - 2}$$

hay

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

với

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1} \quad \text{và} \quad s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}$$

Mẫu số trong công thức cho $s^2, (n_1 + n_2 - 2)$, được gọi là **số bậc tự do** đi cùng với s^2. Người ta có thể chứng minh hoặc bằng toán học hay bằng thực nghiệm rằng giá trị kỳ vọng của số ước lượng chung s^2 là bằng với σ^2 và vì vậy rằng s^2 là một số ước lượng không bị lệch của phương sai tổng thể chung. Cuối cùng, nhắc lại rằng các số chia của tổng các bình phương của các độ lệch chuẩn lần lượt trong s_1^2 và $s_2^2, (n_1 - 1)$ và $(n_2 - 1)$ là các con số bậc tự do đi cùng với hai ước lượng độc lập của σ^2. Lưu ý rằng s^2 là một số bình quân gia quyền của s_1^2 và s_2^2, với các bậc tự do là trọng số, và vì vậy là một số ước lượng mà sử dụng thông tin chung cho cả hai mẫu và sở hữu $(n_1 - 1) + (n_2 - 1)$, hay $(n_1 + n_2 - 2)$, các bậc tự do.

Ước lượng khoảng tin cậy cho mẫu nhỏ đối với $(\mu_1 - \mu_2)$ với hệ số tin cậy $(1 - \alpha)$ được cho trong phần trình bày sau đây.

Một Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% cho Mẫu Nhỏ đối với $(\mu_1 - \mu_2)$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2} s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

trong đó *s* có được từ ước lượng chung của σ^2, được trình bày ở trên.

Các giả định: Các mẫu được chọn lựa ngẫu nhiên và độc lập từ những tổng thể có phân phối chuẩn. Những phương sai của các tổng thể, σ_1^2 và σ_2^2, là bằng nhau.

Lưu ý tính tương đồng trong các qui trình lập nên các khoảng tin cậy cho một số trung bình duy nhất (Phần 7.5) và sự khác biệt giữa hai số trung bình. Trong cả hai trường hợp, thì khoảng được xây dựng bằng cách sử dụng ước lượng điểm thích hợp và sau đó thêm vào và trừ đi một lượng bằng với $t_{\alpha/2}$ lần độ lệch chuẩn *ước lượng được* của ước lượng điểm.

VÍ DỤ **7.6** Một hoạt động lắp ráp tại một nhà máy chế tạo đòi hỏi xấp xỉ một giai đoạn huấn luyện một tháng cho một nhân viên mới để có thể đạt được hiệu suất tối đa. Một phương pháp huấn luyện mới được đề xuất và một sự kiểm tra được tiến hành nhằm so sánh phương pháp mới này với qui trình tiêu chuẩn. Hai nhóm gồm chín nhân viên mới được huấn luyện trong một thời gian ba tuần, một nhóm sử dụng phương pháp mới và nhóm kia theo qui trình huấn luyện tiêu chuẩn. Độ dài thời gian tính bằng phút đòi hỏi cho mỗi nhân viên để lắp ráp một thiết bị được ghi nhận vào lúc cuối thời kỳ ba tuần này. Những đại lượng này xuất hiện trong Bảng 7.4. Xây dựng một ước lượng khoảng tin cậy 95% cho sự khác biệt giữa thời gian trung bình để lắp ráp sau thời kỳ huấn luyện kéo dài ba tuần đối với qui trình tiêu chuẩn và qui trình mới.

BẢNG **7.4** Dữ liệu thời gian lắp ráp cho Ví dụ 7.6

Qui trình Tiêu chuẩn	**Qui trình Mới**
32	35
37	31
35	29
28	25
41	34
44	40
35	27
31	32
34	31

Lời giải Đặt μ_1 và μ_2 lần lượt bằng với thời gian trung bình để lắp ráp cho qui trình lắp ráp tiêu chuẩn và mới. Ngoài ra, giả định rằng độ biến thiên trong thời gian trung bình để lắp ráp về bản chất là một hàm số của những sự khác biệt riêng lẻ và rằng độ biến thiên cho hai tổng thể các đại lượng sẽ xấp xỉ bằng nhau.

Các số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu có thể được tìm thấy bằng cách sử dụng một máy tính có chức năng thống kê:

$$\bar{x}_1 = 35.22 \qquad s_1 = 4.9441$$
$$\bar{x}_2 = 31.56 \qquad s_2 = 4.4752$$

Sau đó ước lượng chung của phương sai chung là

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{195.55+160.22}{9+9-2} = 22.24$$

và độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{22.24} = 4.72$

Tham chiếu lại Bảng 4 trong Phụ lục II, chúng ta tìm thấy rằng giá trị của *t* với diện tích $\alpha/2 = 0.025$ về phía bên phải của nó và $(n_1+n_2-2) = 9+9-2 = 16$ bậc tự do là $t_{0.025} = 2.120.$ Thay thế vào trong công thức

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2} s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

chúng ta tìm ra ước lượng khoảng (hay khoảng tin cậy 95%) sẽ là

$$(35.22 - 31.56) \pm (2.120)(4.72)\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}$$

hay

$$3.66 \pm 4.72$$

Như vậy, chúng ta ước lượng sự khác biệt về thời gian trung bình để lắp ráp, $(\mu_1 - \mu_2),$ rơi vào trong khoảng - 1.06 đến 8.38. Lưu ý rằng bề rộng khoảng này là đáng kể và rằng việc gia tăng cỡ các mẫu và ước lượng lại ắt là một điều nên làm.

Trước khi kết luận thảo luận của chúng ta, chúng tôi bình luận về hai giả định mà qua đó các qui trình suy luận của chúng ta được căn cứ vào. Những sự chệch hướng vừa phải so với giả định rằng các tổng thể sở hữu một phân phối xác suất chuẩn không ảnh hưởng nghiêm trọng đến những đặc trưng của số ước lượng hay hệ số tin cậy cho các khoảng tin cậy tương ứng. Trái lại, các phương sai tổng thể phải gần bằng nhau để cho các qui trình đề cập ở trên có giá trị. Một qui trình sẽ được trình bày trong Phần 8.9 về việc kiểm tra một giả thuyết có liên quan đến sự bằng nhau của hai phương sai tổng thể. Một qui trình khác cho việc ước lượng $\mu_1 - \mu_2$ khi các tổng thể là chuẩn nhưng có các phương sai không bằng nhau $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$ sẽ được trình bày trong Chương 8.

Bài tập

Các Kỹ thuật Cơ bản

7.24 Các mẫu ngẫu nhiên độc lập được chọn từ hai tổng thể, 1 và 2. Các cỡ mẫu, trung bình, và phương sai được cho trong bảng đi kèm dưới đây. Tìm biên sai số cho việc ước lượng sự khác biệt về các số trung bình tổng thể $(\mu_1 - \mu_2)$.

	Tổng thể 1	**Tổng thể 2**
Cỡ mẫu	35	49
Trung bình mẫu	12.7	7.4
Phương sai mẫu	1.38	4.14

7.25 Các mẫu ngẫu nhiên độc lập được chọn từ hai tổng thể, 1 và 2. Các cỡ mẫu, trung bình, và phương sai được cho trong bảng đi kèm dưới đây. Tìm khoảng tin cậy 90% cho sự khác biệt về các số trung bình tổng thể, và giải thích kết quả của bạn.

	Tổng thể	
	1	**2**
Cỡ mẫu	64	64
Trung bình mẫu	2.9	5.1
Phương sai mẫu	0.83	1.67

7.26 Tìm số bậc tự do cho s^2, số ước lượng chung của σ^2, cho các cỡ mẫu sau đây.

a $n_1 = 16, n_2 = 8$ **b** $n_1 = 10, n_2 = 12$

c $n_1 = 15, n_2 = 3$

7.27 Tính s^2, số ước lượng chung cho σ^2, cho các mẫu dữ liệu sau đây.

a $n_1 = 10,\ n_2 = 4,\ s_1^2 = 3.4,\ s_2^2 = 4.9$

b $n_1 = 12,\ n_2 = 21,\ s_1^2 = 18,\ s_2^2 = 23$

7.28 Bạn được cho hai mẫu ngẫu nhiên độc lập sau đây được rút từ mỗi trong số hai tổng thể chuẩn.

Mẫu 1	12	3	8	5	
Mẫu 2	14	7	7	9	6

Tính toán s^2, số ước lượng chung của σ^2.

7.29 Tìm khoảng tin cậy 95% cho $(\mu_1 - \mu_2)$ trong Bài tập 7.28.

7.30 Các mẫu ngẫu nhiên độc lập gồm $n_1 = 16$ và $n_2 = 13$ quan sát được chọn từ hai tổng thể chuẩn có phương sai bằng nhau. Các số trung bình và phương sai mẫu được thể hiện trong bảng đi kèm sau đây. Tìm khoảng tin cậy 99% cho $(\mu_1 - \mu_2)$. Giải thích khoảng này.

	Tổng thể	
	1	**2**
Cỡ mẫu	16	13
Trung bình mẫu	34.6	32.2
Phương sai mẫu	4.8	5.9

Các Ứng dụng

7.31 Một nghiên cứu được thực hiện nhằm so sánh con số trung bình các cuộc gọi khẩn cấp cho cảnh sát mỗi ca làm việc tám tiếng tại hai quận của một thành phố lớn. Các mẫy gồm 100 ca làm việc tám tiếng được chọn ngẫu nhiên từ hồ sơ lưu trữ của cảnh sát cho mỗi trong số hai khu vực đó, và số cuộc gọi khẩn cấp cho cảnh sát được ghi nhận cho từng ca. Các trị thống kê mẫu được cho trong bảng đi kèm sau đây. Tìm một khoảng tin cậy 90% cho khác biệt về con số trung bình các cuộc gọi khẩn cấp cho cảnh sát mỗi ca làm việc giữa hai quận của thành phố này. Giải thích khoảng này.

	Tổng thể	
	1	**2**

Cỡ mẫu	100	100
Trung bình mẫu	2.4	3.1
Phương sai mẫu	1.44	2.64

7.32 Một phương pháp được đề xuất nhiều năm trước đây cho việc giải quyết sự thiếu hụt năng lượng điện sử dụng các nhà máy nổi điện hạt nhân được định vị một vài dặm ở ngoài khơi bờ biển. Bởi vì có quan ngại về khả năng một sự va chạm của tàu với nhà máy nổi (nhưng được neo) này, một ước lượng về mật độ lưu thông của tàu tại khu vực đó là cần thiết. Số lượng tàu đi qua trong vòng 10 dặm cách vị trí nhà máy điện được đề xuất mỗi ngày, được ghi nhận cho *n* = 60 ngày trong suốt tháng Bảy và tháng Tám, sở hữu một trung bình và phương sai mẫu bằng với:

$$\bar{x} = 7.2 \qquad s^2 = 8.8$$

a. Tìm khoảng tin cậy 95% cho con số trung bình các tàu đi qua trong vòng 10 dặm cách vị trí nhà máy điện được đề xuất trong suốt thời gian một ngày.

b. Mật độ lưu thông của tàu được kỳ vọng là giảm đi trong những tháng mùa đông. Một mẫu gồm *n* = 90 sự ghi nhận hàng ngày về việc quan sát thấy tàu cho các tháng Mười Hai, tháng Giêng và tháng Hai cho ta số trung bình và phương sai như sau:

$$\bar{x} = 4.7 \qquad s^2 = 4.9$$

Hãy tìm khoảng tin cậy 90% cho sự khác biệt về mật độ lưu thông tàu trung bình giữa các tháng mùa hè và mùa đông.

c. Tổng thể đi cùng với ước lượng của bạn trong câu (b) là như thế nào? Điều gì có thể sai với qui trình chọn mẫu trong các câu (a) và (b)?

7.33 Một công ty chế tạo xe hơi gần đây đã quyết định rằng nhân tố chủ yếu làm hạn chế doanh số bán hàng không phải là chiếc xe hay dịch vụ của họ mà là cách tiếp cận bán hàng mà những nhân viên bán hàng áp dụng. Trong một cuộc kiểm tra về ý kiến này, 16 nhân viên bán hàng tại một đại lý bán hàng lớn được chỉ định ngẫu nhiên vào hai nhóm gồm 8 nhân viên mỗi nhóm. Mỗi nhóm sử dụng một cách tiếp cận bán hàng cứng nhắc đối với khách hàng trong thời gian một tháng; nhóm kia áp dụng cách tiếp cận bán hàng mềm dẻo, chậm hơn trong cùng thời gian. Các số trung bình và độ lệch chuẩn của doanh số bán hàng tính bằng đôla mỗi nhân viên bán hàng mỗi tháng cho hai nhóm được cho trong bảng đi kèm dưới đây.

Dữ liệu Mẫu	**Bán hàng Cứng nhắc**	**Bán hàng Mềm dẻo**
Cỡ mẫu	8	8
Trung bình mẫu	106,200	111,900
Độ lệch chuẩn mẫu	24,400	28,600

a. Tìm khoảng tin cậy 99% cho $(\mu_1 - \mu_2)$, khác biệt trong mức doanh số bán hàng trung bình cho hai cách tiếp cận. Giải thích khoảng này.

b. Liệu khoảng tin cậy được xây dựng trong câu (a) có chứa giá trị $(\mu_1 - \mu_2) = 0$ hay không? Liệu khoảng tin cậy này có chỉ ra rằng có một sự khác biệt trong mức doanh số bán hàng trung bình cho hai cách tiếp cận này không? Giải thích.

7.34 Một bộ phận cho vay của ngân hàng tìm thấy rằng 57 khoản cho vay mua nhà trong tháng Tư có một giá trị trung bình là \$78,100 và một độ lệch chuẩn là \$6300. Một phân tích về khoản cho vay trong tháng Năm, với tổng cộng là 66 khoản, cho thấy giá trị trung bình là \$82,700 và độ lệch chuẩn là \$7100. Giả định rằng các khoản cho vay mua nhà này đại diện cho các mẫu ngẫu nhiên của những giá trị các hồ sơ xin vay mua nhà được bộ phận dịch vụ của ngân hàng này chấp thuận. Tìm khoảng tin cậy 98% cho sự khác biệt trong mức trung bình của các hồ sơ xin vay mua nhà được chấp thuận từ tháng Tư đến tháng Năm.

7.35 Bằng cách nào mà những giám đốc doanh nghiệp và các chuyên gia phân tích thị trường chứng khoán so sánh được với nhau trong các dự báo của họ về việc gia tăng trong tổng sản phẩm quốc gia (GNP) cho năm tới? Những dự báo (tính bằng tỷ lệ phần trăm) từ năm giám đốc doanh nghiệp và năm chuyên gia phân tích thị trường được chọn ngẫu nhiên được cho trong bảng sau.

Giám đốc doanh nghiệp	3.4	2.8	3.9	3.7	3.4
Chuyên gia phân tích thị trường	3.3	3.9	3.4	3.8	4.0

Tìm khoảng tin cậy 90% cho sự khác biệt về các dự báo GNP trung bình giữa các nhà giám đốc doanh nghiệp và chuyên gia phân tích thị trường chứng khoán. Giải thích khoảng này.

7.7 ƯỚC LƯỢNG MỘT TỶ LỆ NHỊ THỨC

Nhiều cuộc điều tra có mục tiêu là sự ước lượng tỷ lệ của con người hay vật thể trong một nhóm lớn mà sở hữu một thuộc tính cụ thể. Một cuộc điều tra như vậy là một ví dụ thực tiễn cho thí nghiệm nhị thức đã được thảo luận trong Chương 4. Việc ước lượng tỷ lệ các thương vụ bán hàng mà có thể được kỳ vọng trong một số lượng lớn các cuộc tiếp xúc với khách hàng là một vấn đề thực tiễn đòi hỏi sự ước lượng một tham số nhị thức *p*.

Ước lượng điểm tốt nhất cho tham số nhị thức *p* cũng là số ước lượng mà ắt sẽ được chọn về mặt trực giác. Nghĩa là, số ước lượng của *p*, được biểu thị bởi ký hiệu $\hat{p}$, là tổng số *x* những lần thành công chia cho tổng số *n* lần thử:

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

trong đó *x* là số lượng những lần thành công trong *n* lần thử. [Dấu mũ (^) bên trên một tham số là ký hiệu được sử dụng để biểu thị ước lượng của tham số đó.] Khi nói đến "Tốt nhất", thì chúng ta ám chỉ rằng $\hat{p}$ là không bị lệch và sở hữu một phương sai nhỏ hơn so với các số ước lượng có thể có khác.

Như đã lưu ý trong Chương 6, số ước lượng $\hat{p}$ sở hữu một phân phối xác suất mà có thể được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn do Định lý Giới hạn Trung tâm. Đây là một số ước lượng không bị lệch cho tỷ lệ tổng thể *p*, với trung bình và độ lệch chuẩn được thể hiện trong phần trình bày sau.

Trung bình và Độ lệch Chuẩn của $\hat{p}$

$$E(\hat{p}) = p$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Sau đó, từ Phần 7,3, các qui trình ước lượng điểm và khoảng cho *p* được cho trong phần trình bày sau:

Ước lượng Điểm cho *p*

Trị ước lượng: $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$

Biên sai số: $1.96\sigma_{\hat{p}} = 1.96\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$

Biên sai số ước lượng được: $1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

Một Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% cho *p*

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

Giả định: n phải đủ lớn để cho phân phối mẫu của $\hat{p}$ có thể được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn. Khoảng $p \pm 2\sigma_{\hat{p}}$ phải được chứa trong khoảng từ 0 đến 1.

Khó khăn duy nhất mà ta gặp phải trong qui trình này sẽ là trong việc tính toán $\sigma_{\hat{p}}$, mà có liên quan đến giá trị chưa được biết của *p* (và $q = 1 - p$). Các bạn sẽ lưu ý rằng chúng ta đã thay thế $\hat{p}$ cho tham số *p* trong độ lệch chuẩn $\sqrt{pq/n}$. Khi *n* là lớn, thì sai số nhỏ sẽ được áp dụng bởi sự thay thế này. Thực tế là độ lệch chuẩn chỉ thay đổi rất ít khi *p* thay đổi. Tính chất này có thể quan sát thấy trong Bảng 7.5, ở đó $\sqrt{pq}$ được ghi nhận cho nhiều giá trị của *p*. Lưu ý rằng $\sqrt{pq}$ thay đổi rất ít khi *p* thay đổi, đặc biệt là khi *p* tiến gần đến 0.5.

BẢNG **7.5** Một số giá trị tính toán của $\sqrt{pq}$

p	$\sqrt{pq}$
0.5	0.50
0.4	0.49
0.3	0.46
0.2	0.46
0.1	0.40

VÍ DỤ **7.7** Một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 100$ nhà bán buôn mua ống nhựa polyvinyl chỉ ra cho thấy rằng 59 người có kế hoạch gia tăng việc mua hàng của mình trong năm tới. Hãy ước lượng tỷ lệ *p* của các nhà bán buôn trong tổng thể tất cả các nhà bán buôn ống nhựa polyvinyl mà có kế hoạch gia tăng việc mua hàng của mình trong năm tới, và tìm biên sai số ước lượng. Tìm khoảng tin cậy 95% cho *p*.

Lời giải Ước lượng điểm là $\hat{p} = x/n = 59/100 = 0.59$, và biên sai số ước lượng là

$$1.96\sigma_{\hat{p}} = 1.96\sqrt{\frac{pq}{n}} \approx 1.96\sqrt{\frac{(0.59)(0.41)}{100}} = 0.096$$

Một khoảng tin cậy 95% cho *p* là

$$\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

Thay thế vào trong công thức này, chúng ta có được

$$0.59 \pm 1.96(0.049)$$

hay

$$0.59 \pm 0.096$$

Như vậy, chúng ta ước lượng rằng tỷ lệ *p* của những nhà bán buôn mà có kế hoạch gia tăng việc mua hàng của mình nằm trong khoảng 0.494 đến 0.686, với hệ số tin cậy 0.95.

Bài tập

Các Kỹ thuật Cơ bản

7.36 Một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 900$ quan sát từ một tổng thể nhị thức tạo ra $x = 655$ lần thành công. Hãy tìm khoảng tin cậy 99% cho *p,* và giải thích khoảng này.

7.37 Một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 300$ quan sát từ một tổng thể nhị thức tạo ra $x = 263$ lần thành công. Hãy tìm khoảng tin cậy 90% cho *p,* và giải thích khoảng này.

7.38 Một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 500$ quan sát từ một tổng thể nhị thức tạo ra $x = 140$ lần thành công. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho *p,* và giải thích khoảng này.

7.39 Giả định rằng con số những lần thành công quan sát được trong $n = 500$ lần thử của một thí nghiệm nhị thức là 27. Tìm khoảng tin cậy 95% cho *p.* Tại sao khoảng tin cậy này hẹp hơn so với khoảng tin cậy trong Bài tập 7.38?

Các Ứng dụng

7.40 Ngày càng có nhiều đàn ông và phụ nữ đang thực hiện các lựa chọn mua hàng mà đã từng có thời được nhường cho người khác phái của mình, và trong hầu hết các hộ gia đình có hôn nhân, thì người chồng và người vợ có tiếng nói ngang bằng trong việc thực hiện các lần mua sắm lớn. Trong bài báo của mình đăng trên tạp chí *American Demographics (Nhân khẩu học Hoa Kỳ),*Shannon Dorch (1994) đề xuất rằng các công ty quảng cáo có lẽ phải thay đổi nơi mà họ quảng cáo một số mặt hàng nhất định và mức độ quảng cáo nên thế nào. Rõ ràng là, việc quảng cáo xe hơi cần đến được với phụ nữ. Xấp xỉ khoảng 80% các ông chồng và các bà vợ đều đồng ý rằng họ có tiếng nói ngang bằng trong việc mua một căn nhà mới, trong khi 58% đàn ông và 56% phụ nữ đồng tình rằng họ có tiếng nói ngang nhau trong việc mua một chiếc xe mới. Giả định rằng những tỷ lệ phần trăm này được căn cứ trên các cỡ mẫu là 3000.

a. Tìm ước lượng khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ các ông chồng mà nhất trí rằng cả họ lẫn các bà vợ của mình có một tiếng nói ngang nhau trong việc mua nhà. (Cũng sự ước lượng bằng số này ắt sẽ cho chúng ta tỷ lệ phần trăm các bà vợ mà đồn ý rằng cả họ lẫn các ông chồng của mình có một tiếng nói ngang bằng trong việc mua nhà.)

b. Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ phần trăm các ông chồng mà đồng ý rằng vợ của họ có tiếng nói ngang với họ trong việc mua sắm chiếc xe hơi mới cho gia đình.

c. Ước lượng tỷ lệ phần trăm các bà vợ mà đồng tình rằng chồng của họ có một tiếng nói ngang bằng trong việc mua chiếc xe hơi mới cho gia đình.

7.41 Công ty Ford Motor đã đặt hàng một nghiên cứu để xác định lĩnh vực nào là nơi mà các nhà lãnh đạo chuyên nghiệp yêu cầu các vấn đề chính sách môi trường. Trong số 7000 nhà lãnh đạo về kinh doanh, giáo dục, báo chí, chính phủ và ủng hộ môi trường tham gia, 80% nghĩ rằng công nghiệp phải chịu trách nhiệm về sự phá hủy và dọn dẹp môi trường do hành động của ngành này (*Opinions '90,* tháng Sáu năm 1990, trang 64.)

a. Xác định một ước lượng điểm của giá trị đúng của *p* với biên sai số 95%. Liệu sai số này có nhỏ hơn ba điểm phần trăm không?

b. Sử dụng các kết quả trong câu (a) để xây dựng một ước lượng khoảng tin cậy 95% cho *p*.

7.42 Trong một cuộc điều tra gần đây về 1600 hộ gia đình thu nhập cao tại năm vùng đô thị, 24% những người đàn ông tự xem mình là những người mua sắm chính về hàng tạp hóa cho hộ gia đình của mình, và áo quần cho cá nhân mình (Dholakia, 1994). Mặc dù những người đàn ông đi mua hàng trong cuộc điều tra này là những người có trình độ hiểu biết về máy tính rất cao (87% có máy tính tại nhà), thì chỉ có 22% nói rằng việc mua hàng được vi tính hóa mang lại sự thỏa mãn.

a. Tìm ước lượng khoảng tin cậy 90% cho tỷ lệ phần trăm những người đàn ông mà tự xem mình là những người mua sắm chính về hàng tạp hóa cho hộ gia đình của mình, và áo quần cho cá nhân mình.

b. Tìm biên sai số trong việc ước lượng tỷ lệ những người đàn ông đi mua hàng có trình độ hiểu biết cao về máy tính mà nhận thấy rằng việc mua hàng được vi tính hóa mang lại sự thỏa mãn.

7.43 Trong cuộc điều tra năm 1993 bởi Hiệp hội Dinh dưỡng Hoa Kỳ và công ty Kraft General Food liên quan đến dinh dưỡng và thói quen ăn uống, 54% những người trả lời xem dinh dưỡng là rất quan trọng, 52% chỉ ra rằng các thói quen ăn uống đang thay đổi, và 44% nói rằng họ làm tất cả những gì có thể để có một chế độ ăn uống lành mạnh ("Crunching Numbers", 1994). Nếu 1000 người trả lời tham gia vào cuộc điều tra này, thì những ước lượng về các tỷ lệ phần trăm tổng thể tương ứng chính xác đến đâu? Tìm biên sai số cho từng ước lượng.

7.44 Ngành công nghiệp quảng cáo cố gắng bán các sản phẩm bằng cách tự thể hiện mình trong các tình huống với ý định thu hút các phân khúc thị trường khác nhau. Trừ phi được dự định nhắm một cách cụ thể đến những công dân đã lớn tuổi, thì hầu hết các chương trình quảng cáo đề cao đến những người trưởng thành trẻ tuổi, năng động (Darnay, 1994). Trong một cuộc điều tra 1002 người Mỹ trong độ tuổi từ 18 trở lên, thì các câu trả lời cho câu hỏi "Bạn nghĩ những người sau đây được đại diện một cách công bằng như thế nào trong các chương trình quảng cáo?" được tóm tắt trong bảng sau.

Bộ phận Dân chúng	Chưa được đại diện đúng mức
Người khuyết tật	0.57
Người gốc Tây Ban Nha và Bồ Đào Nha	0.41
Người từ 50 tuổi trở lên	0.37
Người da đen	0.29
Thiếu niên/người trưởng thành trẻ tuổi	0.09

a. Tìm biên sai số cho sự ước lượng về tỷ lệ những người Mỹ mà cảm thấy rằng người khuyết tật chưa được đại diện đúng mức khi quảng cáo.

b. Biên sai số đi cùng với tỷ lệ những người Mỹ mà cảm thấy rằng thiếu niên và người trưởng thành trẻ tuổi chưa được đại diện đúng mức khi quảng cáo là bao nhiêu? Tại sao biên sai số trong trường hợp này khác với biên sai số trong câu (a)?

c. Tính ước lượng khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ những người Mỹ mà cảm thấy rằng những người từ 50 tuổi trở lên chưa được đại diện đúng mức trong các chương trình quảng cáo.

7.8 ƯỚC LƯỢNG SỰ KHÁC BIỆT GIỮA HAI TỶ LỆ NHỊ THỨC

Sự ước lượng thứ tư và cuối cùng mà chương này xem xét là sự ước lượng về sự khác biệt giữa các tham số của hai tổng thể nhị thức - nghĩa là, sự khác biệt giữa hai tỷ lệ nhị thức. Chúng ta có lẽ quan tâm đến sự khác biệt giữa những tỷ lệ sản xuất cho mỗi trong số hai dây chuyền sản xuất, hay sự khác biệt trong tỷ lệ những người bỏ phiếu ủng hộ hai ứng cử viên dẫn đầu cho chức thị trưởng. Một cách trực giác, thì sự khác biệt giữa hai tỷ lệ mẫu ắt cung cấp thông tin tối đa về các tỷ lệ tổng thể tương ứng.

Giả định rằng hai tổng thể nhị thức 1 và 2 có các tham số lần lượt là p_1 và p_2. Những mẫu ngẫu nhiên độc lập bao gồm n_1 và n_2 lần thử được rút từ các tổng thể tương ứng, và những ước lượng $\hat{p}_1$ và $\hat{p}_2$ được tính toán. Phân phối mẫu của sự chênh lệch $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ được làm rõ mà không có bằng chứng trong phần trình bày sau.

Các Đặc trưng của Phân phối Mẫu của Chênh lệch ($\hat{p}_1 - \hat{p}_2$) Giữa Hai Tỷ lệ Mẫu

Giả định rằng các mẫu độc lập ngẫu nhiên gồm n_1 và n_2 quan sát được chọn lựa từ những tổng thể nhị thức với các tham số lần lượt là p_1 và p_2. Phân phối mẫu của sự khác biệt giữa các tỷ lệ mẫu

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right)$$

sẽ có các đặc trưng sau đây:

1. Trung bình và độ lệch chuẩn của $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ sẽ là

$$\mu_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} = p_1 - p_2$$

và

$$\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

2. Phân phối xác suất của $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ có thể được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn khi n_1 và n_2 là lớn, do Định lý Giới hạn Trung tâm.

Khi chúng ta sử dụng một phân phối chuẩn để ước lượng xấp xỉ các xác suất nhị thức , thì khoảng $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm 2\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}$ phải được chứa bên trong khoảng $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$, mà thay đổi từ -1 đến 1 và không phải từ 0 đến 1, như trong trường hợp của một tỷ lệ duy nhất.

Bởi vì $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ là một số ước lượng không bị lệch của $(p_1 - p_2)$, số ước lượng điểm của $p_1 - p_2$ được thể hiện trong phần trình bày sau đây.

Ước lượng Điểm của (p_1 - p_2)

Trị ước lượng: $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$

Biên sai số: $1.96_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} = 1.96\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$

[*Lưu ý:* Các ước lượng $\hat{p}_1$ và $\hat{p}_2$ phải được thay thế cho p_1 và p_2 để ước lượng biên sai số.]

Khoảng tin cậy $(1-\alpha)100\%$, phù hợp khi n_1 và n_2 là lớn, được trình bày dưới đây.

Một Khoảng Tin cậy (1 - α) 100% cho Mẫu Lớn của (p_1 - p_2)

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

Giả định: n_1 và n_2 phải đủ lớn để cho phân phối mẫu của $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ có thể được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn. Khoảng $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm 2\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}$ phải được chứa trong khoảng -1 đến 1.

VÍ DỤ **7.8** Một công ty lớn bán lẻ quần áo đã tiến hành một nghiên cứu nhằm so sánh tính hiệu quả của quảng cáo trên báo tại mỗi trong số hai thành phố lớn. Một trang quảng cáo lớn rộ được thực hiện trên tờ báo chính tại mỗi trong số hai thành phố lớn. Ngay lập tức sau đó, một tổ chức nghiên cứu tiếp thị đã tiến hành một cuộc điều tra qua điện thoại 1000 người lớn được chọn ngẫu nhiên đang sống tại một khu vực ngoại ô có thu nhập trung bình cao tại mỗi trong số các thành phố này nhằm xác định tỷ lệ mà đã đọc trang quảng cáo của công ty bán lẻ đó. Các tỷ lệ mẫu là $\hat{p}_1 = 0.18$ và $\hat{p}_2 = 0.14$. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho sự chênh lệch trong tỷ lệ người lớn tại hai tổng thể này mà đã đọc trang quảng cáo đó.

Lời giải Một khoảng tin cậy 95% cho chênh lệch $(p_1 - p_2)$ trong tỷ lệ những người lớn mà đã đọc trang quảng cáo của công ty bán lẻ đó là

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

trong đó $\alpha = 0.5$ và $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. Thay thế giá trị này, cùng với các ước lượng $\hat{p}_1 = 0.18$ và $\hat{p}_2 = 0.14$, vào công thức tính khoảng tin cậy, chúng ta tìm ra khoảng tin cậy là

$$(0.18 - 0.14) \pm 1.96\sqrt{\frac{(0.18)(0.82)}{1000} + \frac{(0.14)(0.86)}{1000}}$$

hay

$$0.04 \pm 0.321$$

Như vậy, chúng ta ước lượng sự khác biệt trong các tỷ lệ những độc giả về trang quảng cáo đó nằm trong khoảng từ 0.0079 đến 0.0721. Nếu chúng ta mong muốn thể hiện sự khác biệt này bằng tỷ lệ phần trăm, thì chúng ta nhân từng tỷ lệ cho 100. Sau đó chúng ta có thể nói rằng chúng ta ước lượng sự khác biệt trong các tỷ lệ phần trăm những người lớn đọc trang quảng cáo tại hai khu vực tiếp thị nằm trong khoảng 0.79% và 7.21%.

Bài tập

Các Kỹ thuật Cơ bản

7.45 Các mẫu gồm $n_1 = 500$ và $n_2 = 500$ quan sát được chọn từ những tổng thể nhị thức 1 và 2, và $x_1 = 120$ và $x_2 = 147$ được quan sát. Tìm biên sai số ước lượng sự khác biệt về các tỷ lệ tổng thể $(p_1 - p_2)$.

7.46 Các mẫu gồm $n_1 = 800$ và $n_2 = 640$ quan sát được chọn từ những tổng thể nhị thức 1 và 2, và $x_1 = 337$ và $x_2 = 374$ được quan sát.

a. Tìm khoảng tin cậy 90% cho chênh lệch $(p_1 - p_2)$ trong hai tham số tổng thể. Giải thích khoảng này.

b. Các giả định nào mà bạn cần đặt ra để cho khoảng tin cậy là có ý nghĩa?

7.47 Các mẫu gồm $n_1 = 1265$ và $n_2 = 1688$ quan sát được chọn từ những tổng thể nhị thức 1 và 2, và $x_1 = 849$ và $x_2 = 910$ được quan sát.

a. Tìm khoảng tin cậy 99% cho chênh lệch $(p_1 - p_2)$ trong hai tham số tổng thể. Giải thích khoảng này.

b. Các giả định nào mà bạn cần đặt ra để cho khoảng tin cậy là có ý nghĩa?

7.48 Các mẫu gồm $n_1 = 314$ và $n_2 = 207$ quan sát được chọn từ những tổng thể nhị thức 1 và 2, và $x_1 = 108$ và $x_2 = 102$ được quan sát.

a. Tìm khoảng tin cậy 95% cho chênh lệch $(p_1 - p_2)$ trong hai tham số tổng thể. Giải thích khoảng này.

b. Các giả định nào mà bạn cần đặt ra để cho khoảng tin cậy là có ý nghĩa?

Các Ứng dụng

7.49 Một cuộc điều tra ngân hàng về các khoản chi trả thẻ tín dụng trễ hạn đã tìm thấy rằng tỷ lệ trễ hạn trong một tháng cho trước đối với 414 chủ doanh nghiệp nhỏ là 5.8% so với chỉ 3.6% của 1029 nhà hoạt động chuyên nghiệp. Giả định rằng dữ liệu cho hai loại hình người dùng thẻ này có thể được xem như các mẫu ngẫu nhiên độc lập của những tài khoản hàng tháng qua một khoảng thời gian tương đối dài, ví dụ, một hoặc hai năm. Tìm khoảng tin cậy 95% trong các tỷ lệ về những sự trễ hạn cho hai loại hình người sử dụng thẻ tín dụng này.

7.50 Trong suốt sự phục hồi từ thời kỳ đình trệ kinh tế vào những năm đầu thập niên 1990, các cuộc điều tra do Conference Board tiến hành được sử dụng để đo những kiểu hình hành vi tiêu dùng và sức khỏe dài hạn của nền kinh tế, với những câu hỏi về các chủ đề dàn trải từ những kế hoạch mua sắm của hộ gia đình đến các điều kiện việc làm tại địa phương ("Consumer Confidence (*Niềm tin Người tiêu dùng*)", 1994). Một cuộc thăm dò ý kiến vào tháng Bảy năm 1994 đã cho thấy rằng 10% trong số 5000 hộ gia đình trên toàn quốc kỳ vọng rằng các điều kiện kinh doanh sẽ trở nên tồi tệ hơn, một sự thay đổi có chiều hướng gia tăng từ con số 8% của 5000 hộ gia đình trong tháng trước đó.

a. Xây dựng một ước lượng khoảng tin cậy 95% về sự khác biệt trong các tỷ lệ của những người trả lời mà kỳ vọng rằng điều kiện kinh doanh sẽ trở nên tồi tệ hơn.

b. Giả định nào làm nền tảng cho giá trị của khoảng tin cậy được xây dựng trong câu (a)?

7.51 Theo một nghiên cứu được báo cáo trong *American Enterprise (Doanh nghiệp Mỹ)* ("How the Japanese (*Người Nhật thì thế nào*)", 1990), thì sự thỏa mãn của người Nhật với thành tựu kinh tế không mở rộng san cuộc sống cá nhân của họ khi so sánh với người Mỹ, mà biểu thị nhiều sự thỏa mãn hơn với cuộc sống, thành tựu cá nhân và công việc của mình. Khi được hỏi "Liệu bạn sẽ mô tả công việc của mình nói chung là thú vị?" thì 88% số người Mỹ trong cuộc điều tra đã trả lời đồng ý so với 58% số người Nhật trong cuộc điều tra này. Gia định rằng chúng ta được cho biết rằng 300 người Mỹ và 2500 người Nhật có trong cuộc điều tra này. Hãy sử dụng thông tin này để lập nên ước lượng khoảng tin cậy 99% cho $p_1 - p_2$.

7.52 Những sự ảnh hưởng theo độ tuổi không chỉ xảy ra ở điều mà bạn xem thấy trên tivi mà còn ở nơi mà bạn xem tivi. Một nghiên cứu (Darnay, 1994, trang 784) đã cho thấy rằng những người Mỹ lớn tuổi hơn thì ít xem tivi trên giường ngủ hơn so với những người trẻ tuổi và thường xem tivi tại phòng ăn nhiều hơn. Với dữ liệu đã cho trong bảng, giả định rằng cỡ mẫu cho từng nhóm tuổi là 100.

Khu vực	**25 đến 44**	**45 đến 69**	**60 trở lên**
Phòng khách/phòng sinh hoạt chung/phòng làm việc	95%	95%	93%
Phòng ngủ	58%	57%	45%
Nhà bếp	12%	20%	20%
Phòng ăn	10%	10%	10%

a. Tìm ước lượng khoảng tin cậy 95% về sự khác biệt trong các tỷ lệ của người Mỹ trong độ tuổi từ 45 đến 69 và những người từ 60 tuổi trở lên mà xem tivi tại phòng ăn.

b. Ước lượng sự khác biệt giữa các tỷ lệ của người Mỹ trong nhóm tuổi từ 25 đến 59 và những người trong nhóm độ tuổi từ 60 trở lên mà xem tivi tại phòng khách, phòng sinh hoạt chung hay phòng riêng làm việc và tìm biên sai số ước lượng. [*Gợi ý:*Tỷ lệ cho nhóm tuổi từ 25 đến 59 sẽ là bình quân giản đơn của các tỷ lệ riêng lẻ dựa trên cỡ mẫu là 2000.]

7.9 CHỌN CỠ MẪU

Sự thiết kế một thí nghiệm về bản chất là một kế hoạch nhằm mua sắm một lượng thông tin. Thông tin này, cũng giống như bất kỳ hàng hóa nào khác, có thể có được với các giá cả khác nhau tùy thuộc vào cách thức mà qua đó có được dữ liệu. Một số đại lượng chứa đựng một lượng thông tin lớn liên quan đến tham số mà ta quan tâm: các đại lượng khác có thể chứa đưng ít thông tin hay hoàn toàn không có thông tin nào. Bởi vì sản phẩm duy nhất của việc nghiên cứu là thông tin, cho nên chúng ta phải cố gắng mua được thông tin đó với phí tổn thấp nhất.

Qui trình chọn mẫu, hay **thiết kế thí nghiệm** (như thường được gọi), ảnh hưởng đến số lượng của thông tin trong mỗi đại lượng. Qui trình này, cùng với cỡ mẫu *n*, kiểm soát tổng khối lượng thông tin liên quan trong một mẫu. Với một số rất ít ngoại lệ, chúng ta sẽ quan tâm đến tình huống chọn mẫu đơn giản nhất - chọn mẫu ngẫu nhiên từ một tổng thể tương đối lớn - và sẽ tập trung sự chú ý của chúng ta vào việc chọn lựa cỡ mẫu *n*.

Nhà nghiên cứu chỉ tạo được ít sự tiến triển trong việc hoạt định một thí nghiệm trước khi gặp phải vấn đề chọn cỡ mẫu. Thật vậy, có lẽ một trong các câu hỏi được đặt ra thường xuyên nhất của một nhà thống kê là **Có bao nhiêu đại lượng nên được đưa vào trong mẫu?** Thật không may, nhà thống kê này không thể trả lời câu hỏi này được nếu không biết có bao nhiêu thông tin mà người làm thí nghiệm mong muốn mua được. Chắc chắn là tổng khối lượng thông tin trong mẫu sẽ ảnh hưởng đến mức độ tốt của phương pháp suy luận và phải được người làm thí nghiệm xác định cụ thể. Đặc biệt liên quan đến sự ước lượng, chúng ta muốn biết mức độ chính xác mà người làm thí nghiệm mong muốn đối với con số ước lượng. Sự chính xác này có thể được định rõ bằng cách xác định cụ thể một mức giới hạn về biên sai số ước lượng.

Ví dụ, giả định rằng chúng ta muốn ước lượng lãi suất cho vay cơ bản của ngân hàng (Ví dụ 7.1), và chúng ta mong muốn sai số của ước lượng nhỏ hơn 0.06 với xác suất là 0.95. Bởi vì xấp xỉ 95% của trung bình mẫu sẽ nằm trong khoảng $1.96\sigma_{\hat{x}}$ trong chọn mẫu lặp lại, nên chúng ta đang yêu cầu rằng $1.96\sigma_{\hat{x}}$ bằng với 0.06 (xem Hình 7.8). Sau đó

$$1.96\sigma_{\hat{x}} = 0.06$$

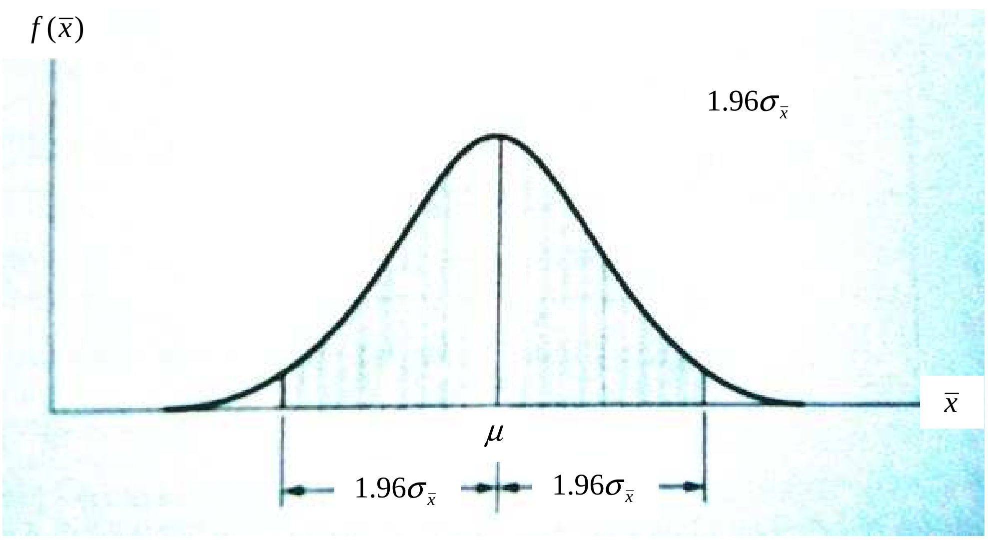
hay

$$1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.06$$

Giải ra *n*, chúng ta có được

$$n = \left(\frac{1.96}{0.06}\right)^2 \sigma^2 \quad \text{hay} \quad n = 1067.111\sigma^2$$

HÌNH **7.8** Phân phối mẫu xấp xỉ của $\bar{x}$ cho các mẫu lớn



Nếu chúng ta biết σ, chúng ta có thể thay thế giá trị của nó vào trong công thức này và tìm ra *n*. Nếu σ là chưa được biết, chúng ta sử dụng ước lượng xấp xỉ tốt nhất sẵn có, để cho một ước lượng *s* có được từ một mẫu trước đó hay từ kiến thức về dãy mà các đại lượng sẽ rơi vào. Bởi vì dãy này xấp xỉ bằng với 4σ (Qui tắc Thực chứng), cho nên một phần tư của dãy sẽ cung cấp một giá trị xấp xỉ cho σ. Trong ví dụ của chúng ta, chúng ta có thể sử dụng độ lệch chuẩn của mẫu của Ví dụ 7.1, mà cung cấp một ước lượng chính xác ở mức chấp nhận được của σ bằng với $s = 0.24$. Vậy thì

$$n = 1067.111\sigma^2$$
$$\approx (1067.111)(0,24)^2 = 61.5$$

hay

$$n = 62$$

Sử dụng cỡ mẫu $n = 62$, chúng ta sẽ chắc chắn ở mức chấp nhận được (với xác suất xấp xỉ bằng với 0.95) rằng ước lượng của chúng ta sẽ nằm trong khoảng $1.96\sigma_{\bar{x}} = 0.06$ của lãi suất cơ bản cho vay thực tế của ngân hàng.

Lời giải $n = 62$ chỉ xấp xỉ bởi vì chúng ta đã phải sử dụng một giá trị xấp xỉ cho σ khi tính toán giá trị của n. Mặc dù việc này có thể làm phiền bạn, thì đây là phương pháp tốt nhất có thể có trong việc lựa chọn cỡ mẫu, và điều này chắc chắn là tốt hơn việc ước đoán.

Ước lượng μ với một khoảng tin cậy $(1 - \alpha)100\%$ mà bề rộng của nó phải nhỏ hơn $W = 2B$, trong đó B là giới hạn tương đương của biên sai số ước lượng, yêu cầu rằng

$$B = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mà đến lượt mình đòi hỏi một cỡ mẫu lớn hơn hay bằng với

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{B^2}$$

Khi cỡ mẫu tạo ra, n là nhỏ hơn 30 và một ước lượng s của σ được sử dụng trong tính toán, thì phương trình này phải được giải bằng cách sử dụng giá trị ghi bảng của $t_{\alpha/2}$ thay vì $z_{\alpha/2}$. Bậc tự do đi cùng với $t_{\alpha/2}$ được qui định là n_0 - 1. Qui trình này được lặp đi lặp lại nhiều lần bằng cách sử dụng giá trị trước đó của n, cho đến khi lời giải cỡ mẫu không còn thay đổi nữa. Ví dụ, nếu giới hạn được thay đổi thành 0.1, thì cỡ mẫu yêu cầu ắt sẽ lớn hơn hay bằng với

$$n = \left(\frac{1.96}{0.1}\right)^2(0.24) = 22.13$$

hay $n = 23$, nhỏ hơn 30. Sử dụng $t_{0.025}$ với 23 - 1 = 22 bậc tự do, thì giá trị phù hợp của t là 2.074 và

$$n = \left(\frac{2.074}{0.1}\right)^2(0.24)^2 = 24.78$$

Bây giờ $n = 25$, d.f. = 24, $t_{0.025} = 2.064$, và

$$n = \left(\frac{2.064}{0.1}\right)^2(0.24)^2 = 24.54$$

Bởi vì cỡ mẫu là giống với cỡ tìm ra trong lần lặp lại trước, nên chúng ta lấy n là lớn hơn hay bằng với 25.

Phương pháp chọn cỡ mẫu cho qui trình ước lượng này được thảo luận trong các phần trước là nhất quán với phương pháp được mô tả trên đây.

Qui trình Chọn lựa Cỡ mẫu

Xác định tham số được ước lượng và độ lệch chuẩn của số ước lượng điểm của nó. Sau đó thực hiện như sau:

1. Chọn B, giới hạn của biên sai số, và một hệ số tin cậy $(1-\alpha)$.
2. Giải phương trình sau cho cỡ mẫu n

$$z_{\alpha/2} \text{ x (độ lệch chuẩn của số ước lượng)} = B$$

trong đó $z_{\alpha/2}$ là giá trị của *z* có diện tích $\alpha/2$ ở phía bên phải của nó.

3. Nếu giá trị tạo ra của *n* là nhỏ hơn 30 và một ước lượng của σ được sử dụng, thì giá trị của $z_{\alpha/2}$ được thay thế bằng $t_{\alpha/2}$ và qui trình này được lặp đi lặp lại cho đến khi cỡ mẫu không thay đổi.

[*Lưu ý:* Đối với phần lớn các số ước lượng (tất cả được trình bày trong cuốn sách này), thì độ lệch chuẩn là một hàm số của cỡ mẫu *n*.]

Chúng ta sẽ minh họa bằng các ví dụ.

VÍ DỤ **7.9** Trong Ví dụ 7.7, một cuộc điều tra 100 đại lý mua hàng tạo ra một ước lượng về tỷ lệ những người bán buôn ống nước polyvinyl mà có kế hoạch gia tăng sự mua hàng của mình trong năm tới. Biên sai số, 0.096, là tương đối lớn. Giả định rằng tổ chức tiếp thị tiến hành cuộc điều tra này được yêu cầu phải thực hiện một cuộc điều tra mới và đạt được một ước lượng chính xác trong giới hạn 0.04 với xác suất bằng với 0.90. Xấp xỉ có bao nhiêu nhà bán buôn ắt đã phải tính đến trong cuộc điều tra này?

Lời giải Đối với ví dụ cụ thể này, giới hạn *B* đối với biên sai số là 0.04. Bởi vì hệ số tin cậy $(1-\alpha) = 0.90$, α phải bằng với 0.10 và $\alpha/2$ là 0.05. Giá trị *z* tương ứng với một diện tích bằng với 0.05 trong đoạn cuối trên của phân phối *z* là $z_{0.05} = 1.645$. Sau đó chúng ta yêu cầu

$$1.645\sigma_{\hat{p}} = 0.04$$

hay

$$1.645\sqrt{\frac{pq}{n}} = 0.04$$

Để giải bài toán này tìm ra *n*, chúng ta phải thay thế một giá trị xấp xỉ của *p* vào phương trình này. Chúng ta có thể sử dụng ước lượng $\hat{p} = 0.59$ dựa vào mẫu gồm *n* = 100; hoặc nếu chúng ta muốn chắc chắn rằng mẫu này là đủ lớn, thì chúng ta có thể sử dụng $p = 0.5$ (thay thế $p = 0.5$ sẽ tạo ra lời giải lớn nhất có thể có cho *n*, bởi vì giá trị tối đa của *pq* xảy ra khi *p* = *q* = 5). Chúng ta sẽ thay thế $p = 0.5$. Sau đó

$$1.645\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{n}} = 0.04$$

hay

$$\sqrt{n} = \frac{(1.645)(0.5)}{0.04} = 20.56$$

và

$$n = (20.56)^2 = 422.7$$

Vì thế, tổ chức tiếp thị đó phải đưa xấp xỉ 423 nhà bán buôn vào cuộc điều tra của mình nếu muốn ước lượng tỷ lệ *p* chính xác trong giới hạn 0.04.

VÍ DỤ **7.10** Một giám đốc nhân sự mong muốn so sánh tính hiệu quả của hai phương pháp huấn luyện các nhân viên công nghiệp nhằm thực hiện một hoạt động lắp ráp nào đó. Một số lượng nhân viên được chia thành hai nhóm bằng nhau, nhóm thứ nhất nhận được phương pháp huấn luyện 1 và nhóm thứ hai được huấn luyện bằng phương pháp 2. Mỗi nhóm sẽ thực hiện hoạt động lắp ráp này, và độ dài của thời gian lắp ráp sẽ được ghi nhận. Người ta kỳ vọng rằng các đại lượng cho cả hai nhóm sẽ có một khoảng xấp xỉ 8 phút. Để cho ước lượng về sự khác biệt về thời gian trung bình để lắp ráp chính xác trong giới hạn 1 phút với xác suất bằng với 0.95, thì cần phải đưa bao nhiêu công nhân vào mỗi nhóm huấn luyện?

Lời giải Cho $1.96\sigma_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}$ bằng với B = 1 phút, chúng ta có được

$$1.96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=1$$

Bởi vì chúng ta mong muốn n_1 bằng với n_2, chúng ta có thể đặt $n_1 = n_2 = n$ và có được phương trình

$$1.96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}}=1$$

Như đã được lưu ý ở trên, độ biến thiên (dãy = range = max - min) của từng phương pháp lắp ráp xấp xỉ như nhau, và vì thế $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Bởi vì dãy này, bằng với 8 phút, là xấp xỉ bằng với 4σ, cho nên

$$4\sigma \approx 8$$

và

$$\sigma \approx 2$$

Thay thế giá trị này cho σ_1 và σ_2 trong phương trình trên, chúng ta có được

$$1.96\sqrt{\frac{(2)^2}{n}+\frac{(2)^2}{n}}=1$$

hay

$$1.96\sqrt{\frac{8}{n}}=1$$

và

$$\sqrt{n}=1.96\sqrt{8}$$

Giải ra, chúng ta có n = 31. Như vậy mỗi nhóm nên có xấp xỉ n = 31 công nhân.

Bảng 7.6 cung cấp một tóm tắt các công thức được sử dụng để xác định các cỡ mẫu cần thiết cho sự ước lượng với một giới hạn cho trước về biên sai số B hay bề rộng khoảng tin cậy $W(W = 2B)$. Lưu ý rằng khi ước lượng p thì công thức cỡ mẫu sử dụng $\sigma^2 = pq$, trong khi khi ước lượng $p_1 - p_2$, thì công thức cỡ mẫu sử dụng $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = p_1q_1 + p_2q_2$.

BẢNG **7.6** Các công thức tính cỡ mẫu

Tham số	**Trị Ước lượng**	**Cỡ Mẫu**	**Giả định**
μ	$\bar{x}$	$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{B^2}$	
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{B^2}$	$n_1 = n_2 = n$
p	$\hat{p}$	$\begin{cases} n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 pq}{B^2} \\ hay \\ n \geq \frac{(0.25) z_{\alpha/2}^2}{B^2} \end{cases}$	$p = 0.5$
$p_1 - p_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$\begin{cases} n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 (p_1 q_1 + p_2 q_2)}{B^2} \\ hay \\ n \geq \frac{2(0.25) z_{\alpha/2}^2}{B^2} \end{cases}$	$n_1 = n_2 = n$ $n_1 = n_2 = n$ và $p_1 = p_2 = 0.5$

Bài tập

Các Kỹ thuật Cơ bản

7.53 Giả định rằng bạn mong muốn ước lượng một số trung bình tổng thể từ một mẫu ngẫu nhiên gồm *n* quan sát, và rằng thí nghiệm trước cho rằng $\sigma = 12.7$. Nếu chúng ta mong muốn ước lượng μ được điều chỉnh nằm trong giới hạn sai số 1.6 với xác suất bằng với 0.95, thì có bao nhiêu quan sát nên được đưa vào trong mẫu của bạn?

7.54 Giả định rằng bạn mong muốn ước lượng một tham số nhị thức *p* chính xác trong giới hạn 0.04 với xác suất bằng với 0.95. Nếu bạn nghi ngờ rằng *p* là bằng với một giá trị nào đó trong khoảng từ 0.1 đến 0.3 và bạn muốn chắc chắn rằng mẫu của mình là đủ lớn, thì *n* phải lớn bao nhiêu? [*Gợi ý:* Khi tính toán $\sigma_{\hat{p}}$, sử dụng giá trị của *p* trong khoảng $0.1 < p < 0.3$ mà sẽ cho ra cỡ mẫu lớn nhất.]

7.55 Các mẫu ngẫu nhiên độc lập gồm $n_1 = n_2 = n$ quan sát sẽ được chọn từ mỗi trong số hai tổng thể, 1 và 2. Nếu bạn mong muốn ước lượng sự khác biệt giữa hai số trung bình tổng thể chính xác trong giới hạn 0.17 với xác suất bằng với 0.90, thì n_1 và n_2 nên lớn bao nhiêu? Giả định rằng bạn biết rằng $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2 \approx 27.8$.

7.56 Các mẫu ngẫu nhiên độc lập gồm $n_1 = n_2 = n$ quan sát sẽ được chọn từ mỗi trong số hai tổng thể, 1 và 2. Nếu bạn mong muốn ước lượng sự khác biệt giữa hai số trung bình tổng thể chính xác trong giới hạn 0.05 với xác suất bằng với 0.98, thì *n* nên lớn bao nhiêu? (Giả định rằng bạn không có thông tin trước về các giá trị của p_1 và p_2, nhưng bạn muốn chắc chắn rằng bạn có một con số phù hợp các quan sát trong mẫu.)

Các Ứng dụng

7.57 Thế chấp ngược tỏ ra hứa hẹn rằng sẽ giúp cho những người sở hữu nhà lớn tuổi sử dụng giá trị tài sản đã thế chấp trong căn nhà của mình để hỗ trợ tài chính cho việc tiêu dùng hiện tại hay chi trả cho những khoản đột xuất (Mayer và Simons, 1994). Một khoản thế chấp ngược sẽ cho phép những người sở hữu nhà cho vay lại giá trị căn nhà đã thế chấp và nhận được các khoản chi trả hàng tháng trong khi vẫn sống trong căn nhà đến khi họ chết hay chuyển đi nơi khác. Một nghiên cứu được đề xuất nhằm ước lượng giá trị tài sản đã thế chấp trong căn nhà sở hữu bởi những người từ 65 tuổi trở lên. Dãy (range) của giá trị tài sản đã thế chấp này được kỳ vọng là vào khoảng $100,000. Nếu các nhà điều tra mong muốn ước lượng giá trị tài sản đã thế chấp chính xác trong giới hạn $5000, thì mẫu của họ phải lớn bao nhiêu?

7.58 Trong Bài tập 7.34, chúng ta đã ước lượng sự khác biệt trong các giá trị trung bình của những khoản cho vay mua nhà của ngân hàng được xử lý trong tháng Tư so với tháng Năm. Giả định rằng ngân hàng đó mong muốn có một ước lượng chính xác hơn về sự khác biệt này, ví dụ, một ước lượng chính xác trong giới hạn $1000 với xác suất bằng 0.95. Có bao nhiêu khoản cho vay mua nhà ắt sẽ phải được đưa vào từng mẫu? (Giả định rằng các cỡ mẫu cho hai tháng này là bằng nhau.)

7.59 Một công ty kiểm toán mong muốn ước lượng sai số trung bình mỗi tài khoản trong các khoản phải thu cho một công ty cung cấp hệ thống ống nước chính xác trong giới hạn $20 với xác suất bằng 0.99. Một mẫu nhỏ trước đó gợi ý rằng sai số mỗi tài khoản sở hữu một độ lệch chuẩn xấp xỉ bằng với $58. Nếu công ty kiểm toán đó mong muốn ước lượng sai số trung bình mỗi tài khoản chính xác trong giới hạn $20, thì có bao nhiêu tài khoản ắt sẽ phải được chọn mẫu? Mẫu này phải sở hữu (các) thuộc tính nào?

7.60 Một doanh nghiệp sản xuất sản phẩm thực phẩm đã thuê một công ty nghiên cứu thị trường để chọn mẫu hai thị trường, I và II, nhằm so sánh các tỷ lệ người tiêu dùng mà ưa thích các đồ ăn tối đông lạnh của doanh nghiệp này hơn là sản phẩm của các đối thủ cạnh tranh. Thông tin trước đó là không sẵn có về độ lớn của các tỷ lệ p_1 và p_2. Nếu công ty sản xuất sản phẩm thực phẩm này mong muốn ước lượng sự khác biệt trong các tỷ lệ người tiêu dùng mà ưa thích các sản phẩm của họ hơn ở mức chính xác trong giới hạn 0.04 với xác suất bằng với 0.95, thì có bao nhiêu khách hàng phải được chọn mẫu tại từng thị trường? Các mẫu đó phải được thu thập bằng cách nào?

7.61 Quay lại Bài tập 7.41. Nếu Công ty Ford Motor mong muốn ước lượng tỷ lệ phần trăm những người lãnh đạo chuyên nghiệp mà cảm thấy rằng ngành công nghiệp phải chịu trách nhiệm cho sự phá hủy và dọn dẹp môi trường gây ra bởi hành động của họ chính xác trong giới hạn 0.01 với xác suất 0.99, thì công ty này cần thực hiện một mẫu lớn bao nhiêu? Giả định rằng không có kiến thức trước đó về giá trị của p.

7.62 Quay lại Bài tập 7.61

a. Tìm cỡ mẫu phù hợp nếu ta biết rằng p nằm trong khoảng từ 0.7 đến 0.9.

b. Liệu cỡ mẫu tìm được trong câu (a) lớn hơn hay nhỏ hơn cỡ mẫu tìm thấy trong Bài tập 7.61? Bạn có thể giải thích sự khác biệt này?

7.63 Các nhóm sắc tộc tại Hoa Kỳ mua những lượng khác nhau về nhiều loại sản phẩm thực phẩm do món ăn của sắc tộc mình (Rickard, 1994). Những người châu Á mua ít rau quả đóng hộp hơn các nhóm khác, và những người gốc Tây Ban Nha và Bồ Đào Nha mua dầu ăn nhiều hơn. Một nhà nghiên cứu quan tâm đến sự phân khúc thị trường cho hai nhóm này muốn ước lượng tỷ lệ các hộ gia đình chọn lựa một số nhãn hiệu của các sản phẩm khác nhau. Nếu nhà nghiên cứu này mong muốn những ước lượng này nằm trong giới hạn 0.03 với xác suất 0.95, thì cô ta phải đưa bao nhiêu hộ gia đình vào mẫu?

QUAY LẠI NGHIÊN CỨU ĐIỂN HÌNH

7.10 TÍNH HỢP LÝ PHÍA SAU SỰ KHÔNG THỪA NHẬN KHOẢN $3.4 TRIỆU CỦA **IRS**

Nghiên cứu điển hình trong chương này mô tả một yêu cầu được thừa nhận của một công ty cho thay thế chi phí sửa chữa và sự không thừa nhận một phần lớn của yêu cầu này của Sở Thuế Nội Địa (IRS). Trong phần thảo luận sau đây, chúng ta sẽ giải thích cơ sở cho sự không thừa nhận của IRS về một phần của yêu sách này. Cả nghiên cứu điển hình lẫn sự giải thích trong phần này được căn cứ trên thông tin chứa trong một bài báo của W. L. Felix, Jr., và R. S. Roussey ("Statistical Inference and the IRS (*Sự Suy luận Thống kê và Sở Thuế Nội Địa*)", *Journal of Accountancy,* tháng Sáu năm 1985).

Để nhớ lại các chi tiết của trường hợp này: một doanh nghiệp yêu cầu thừa nhận $6 triệu trong một năm và $3.8 triệu trong năm tới cho sự thay thế chi phí sửa chữa. Những số liệu này được căn cứ trên "các kỹ thuật chọn mẫu ngẫu nhiên", cụ thể là, các mẫu gồm 350 khoản mục trong năm đầu tiên và 520 trong năm tiếp theo. IRS đã không phản đối qui trình chọn mẫu này, các cỡ mẫu, hay việc sử dụng sự suy luận thống kê để ước lượng tổng yêu cầu thừa nhận về sự thay thế. Tuy nhiên, IRS đã "tham khảo các tiêu chuẩn được viết thành sách cho việc chọn mẫu thống kê mà ắt cho phép một biểu thức toán học về biên sai số đi cùng với một mẫu (sự tính toán sai số mẫu)". Hơn nữa, IRS giữ quan điểm rằng công ty đó "ắt có thể và nên áp dụng sai số mẫu để tính toán một giới hạn thấp hơn về sự thừa nhận đối với chi phí sửa chữa được qui định cho phép để cho bộ phận quản lý ắt đã có thể nói, ví dụ, 'Chúng tôi chắc chắn 95% rằng thừa nhận đối với chi phí sửa chữa được qui định cho phép tối thiểu là *X* đôla.' " Trên thực tế, IRS đã tính toán giới hạn thấp hơn này và sử dụng nó như là sự thay thế cho chi phí sửa chữa mà cơ quan này ắt cho phép.

Để hiểu quan điểm của IRS liên quan đến sự không thừa nhận này, chúng ta cần chuyển dịch hai câu trích dẫn này sang cách diễn đạt của chương này. Trong câu trích dẫn thứ nhất, IRS khẳng định rằng doanh nghiệp đó ắt đã phải cung cấp thông tin về "sai số mẫu". Nói về sai số mẫu, chúng ta giả định rằng cơ quan này ám chỉ sai số của ước lượng.

Giải thích câu trích dẫn thứ hai, chúng ta giả định rằng IRS có ý muốn nói rằng bộ phận quản lý ắt đã phải đặt ra một **giới hạn tin cậy thấp hơn 95% đối với tổng chi phí sửa chữa. IRS đã thực hiện sự tính toán này và sau đó chọn LCL như là chi phí sửa chữa tối đa mà cơ quan này ắt cho phép.**

Mặc dù Felix và Roussey không giải thích các chi tiết của qui trình chọn mẫu và ước lượng được sử dụng trong nghiên cứu điển hình này, thì chúng ta sẽ giải thích cách thức mà IRS ắt đã đi đến giới hạn tin cậy thấp hơn cho sự thừa nhận phí tổn sửa chữa dựa trên việc chọn mẫu ngẫu nhiên.

Chúng ta sẽ giả định rằng tổng số lượng các chi phí sửa chữa cho năm đó là N, và cho mục đích minh họa thì chúng ta giả định rằng

$$N = 100{,}000$$

Một mẫu ngẫu nhiên của n = 500 các chi phí sửa chữa này được chọn từ số 100,000 trong tổng thể, và chi phí bình quân của một phí tổn sửa chữa cho n = 500 được tính toán là $\bar{x} = \$65$, ước lượng của tổng các chi phí phí tổn sửa chữa cho 100,000 phí tổn sửa chữa xảy ra trong năm đó là (100,000)($65) = $6,500,000. Nghĩa là, để $\hat{\tau}$ tượng trưng cho tổng chi phí phí tổn sửa chữa, thì chúng ta có

$$\text{Ước lượng tổng chi phí phí tổn sửa chữa} = \hat{\tau} = N\bar{x}$$
$$= (100{,}000)(65)$$
$$= \$6{,}500{,}000$$

Để tìm một khoảng tin cậy một phía thấp hơn cho tổng chi phí phí tổn sửa chữa, chúng ta cần xác định các đặc trưng của phân phối mẫu của $\hat{\tau} = N\bar{x}$. Chúng ta biết rằng, từ Định lý Giới hạn Trung tâm, phân phối mẫu của $\bar{x}$ sẽ được phân phối xấp xỉ chuẩn. Sau đó, vì N là một hằng số, cho nên phân phối mẫu của $\hat{\tau} = N\bar{x}$ có phân phối xấp xỉ chuẩn với trung bình $N\mu$ và độ lệch chuẩn

$$\sigma_{\hat{\tau}} = N\sigma_{\bar{x}} = N\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bởi vì $\hat{\tau}$ là một số ước lượng không bị lệch của tổng chi phí phí tổn sửa chữa và được phân phối xấp xỉ chuẩn, nên đại lượng này thỏa mãn tất cả các đặc trưng cần có của một khoảng tin cậy 95% một phía thấp hơn được trình bày trong Phần 7.4. Nghĩa là,

$$\text{LCL} = \hat{\tau} - z_{0.05}\sigma_{\hat{\tau}}$$
$$= \hat{\tau} - 1.645\frac{N\sigma}{\sqrt{n}}$$

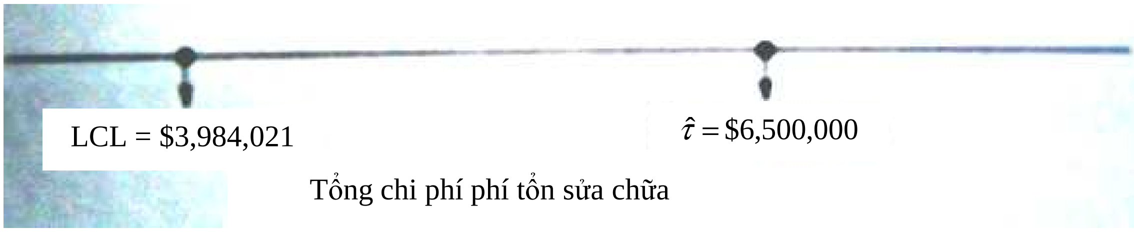
Để minh họa cho sự tính toán của LCL này, giả định rằng độ lệch chuẩn s cho mẫu gồm 500 phí tổn sửa chữa là $342. Vậy thì khoảng tin cậy 95% một phía thấp hơn cho năm đó là

$$\text{LCL} = \hat{\tau} - z_{0.05}\frac{N\sigma}{n}$$
$$= 6{,}500{,}000 - (1.645)(100{,}000)\frac{(342)}{\sqrt{500}}$$
$$= 6{,}500{,}000 - 2{,}515{,}979$$
$$= \$3{,}984{,}021$$

Vì vậy, từ mình họa này thì IRS ắt sẽ cho phép một sự thay thế phí tổn sửa chữa là $3,984,021.

IRS rõ ràng là không mất tiền qua việc chọn một giới hạn tin cậy thấp hơn đối với tổng phí tổn sửa chữa làm sự thayy tế phí tổn sửa chữa tối đa mà cơ quan này sẽ cho phép. Như các bạn có thể thấy từ Hình 7.9, thì số ước lượng điểm không bị lệch $\hat{\tau}$ ước lượng tổng các chi phí phí tổn sửa chữa là $6,500.500. Qua việc chỉ cho phép LCL (trong trường hợp này là $3,984,021), thì IRS sẽ đang cho phép ít hơn tổng chi phí phí tổn sửa chữa thực sự trong 95% thời gian. Chỉ có 5% thời gian là cơ quan này sẽ lừa dối chính phủ Hoa Kỳ. Khi cơ quan này thực sự làm vậy, thì chắc hẳn là chỉ với một khoản nhỏ.

HÌNH **7.9** Vị trí của LCL liên quan đến $\hat{\tau}$



7.11 TÓM TẮT

Chương 7 trình bày các khái niệm cơ bản về ước lượng thống kê và chứng minh cách mà những khái niệm này có thể được áp dụng cho việc tìm ra lời giải cho một số vấn đề thực tiễn.

Các ước lượng là những qui tắc (thường là các công thức) mà nói với chúng ta về cách thức để tính toán một ước lượng tham số dựa trên dữ liệu mẫu. Các ước lượng điểm tạo ra một con số (điểm) duy nhất mà ước lượng giá trị của một tham số tổng thể. Các đặc trưng của một ước lượng điểm được chứa đựng trong sự phân phối mẫu của nó. Như thế chúng ta ưa thích một ước lượng điểm mà không bị lệch - nghĩa là, trung bình của phân phối mẫu của nó bằng với tham số ước lượng được. Ước lượng điểm phải sở hữu một phương sai nhỏ, tốt nhất là tối thiểu.

Độ tin cậy của một ước lượng điểm thường được đo bằng 1.96 lần độ lệch chuẩn (của phân phối mẫu của ước lượng đó) của biên sai số ước lượng. Khi chúng ta sử dụng dữ liệu mẫu để tính toán một ước lượng cụ thể, thì xác suất để cho sai số ước lượng sẽ thấp hơn biên sai số là xấp xỉ 0.95.

Một ước lượng khoảng sử dụng dữ liệu mẫu để tính toán hai điểm - một khoảng tin cậy - mà chúng ta hy vọng rằng sẽ bao quanh tham số ước lượng được. Bởi vì chúng ta sẽ muốn biết xác suất mà khoảng này sẽ bao quanh tham số, nên chúng ta cần biết phân phối xác suất của trị thống kê được sử dụng để tính toán khoảng này.

Bốn số ước lượng - trung bình mẫu, tỷ lệ nhị thức, và những khác biệt giữa các cặp trị thống kê này - được sử dụng để ước lượng các đại lượng tương đương tổng thể của chúng và để chứng minh các khái niệm về ước lượng được phát triển trong chương này. Những số ước lượng này được chọn lựa cho một lý do cụ thể. Nói chung, chúng là những số ước lượng "tốt" cho những tham số tổng thể có liên quan trong rất nhiều ứng dụng. May mắn là tất cả những ước lượng này đều sở hữu, đối với các mẫu lớn, những phân phối xác suất mà xấp xỉ chuẩn. Sự kiện này cho phép chúng ta có thể sử dụng qui trình giống nhau này để lập nên các khoảng tin cậy cho bốn tham số tổng thể $\mu, p, (\mu_1 - \mu_2)$, và $(p_1 - p_2)$. Vì thế chúng ta có thể chứng minh một vai trò quan trọng mà Định lý Giới hạn Trung tâm (Chương 6) đóng trong suy luận thống kê.

Khi các tổng thể được chọn mẫu là chuẩn và các cỡ mẫu là không lớn, thì các số ước lượng của μ và $\mu_1 - \mu_2$ được căn cứ vào phân phối *t* Student.

Những Gợi ý khi Giải Toán

Khi giải các bài tập trong chương này, các bạn được yêu cầu trả lời những câu hỏi thực tế mà một doanh nhân, một người hoạt động chuyên nghiệp, một nhà khoa học, hay một người tình quan tâm. Để tìm ra câu trả lời cho các câu hỏi này, các bạn cần phải suy luận về một hay nhiều hơn các tham số tổng thể. Do vậy, bước đầu tiên trong việc giải một bài toán là xác định mục tiêu của bài tập. Tham số nào mà bạn mong muốn để thực hiện một sự suy luận? Việc trả lời hai câu hỏi sau đây sẽ giúp bạn xác định (các) tham số.

1. *Loại hình dữ liệu* nào có liên quan? Câu hỏi này sẽ giúp bạn quyết định loại tham số nào bạn muốn có để thực hiện sự suy luận: các tỷ lệ nhị thức (các p) hay trung bình tổng thể (các μ). Hãy kiểm tra để xem nếu dữ liệu là thuộc dạng có/không (hai-khả-năng). Nếu quả vậy, thì dự liệu chắc hẳn là nhị thức, và các bạn sẽ quan tâm đến các tỷ lệ. Nếu không, dự liệu chắc hẳn đại diện cho các đại lượng về một hay nhiều biến số ngẫu nhiên định lượng, và bạn sẽ quan tâm đến các số trung bình. Hãy tìm những từ khóa như "tỷ lệ", "tỷ phần" và vân vân. mà chỉ ra dữ liệu nhị thức. Dữ liệu nhị thức thường (nhưng không phải luôn luôn) phát triển từ một "cuộc điều tra mẫu" hay một cuộc trưng cầu ý kiến.

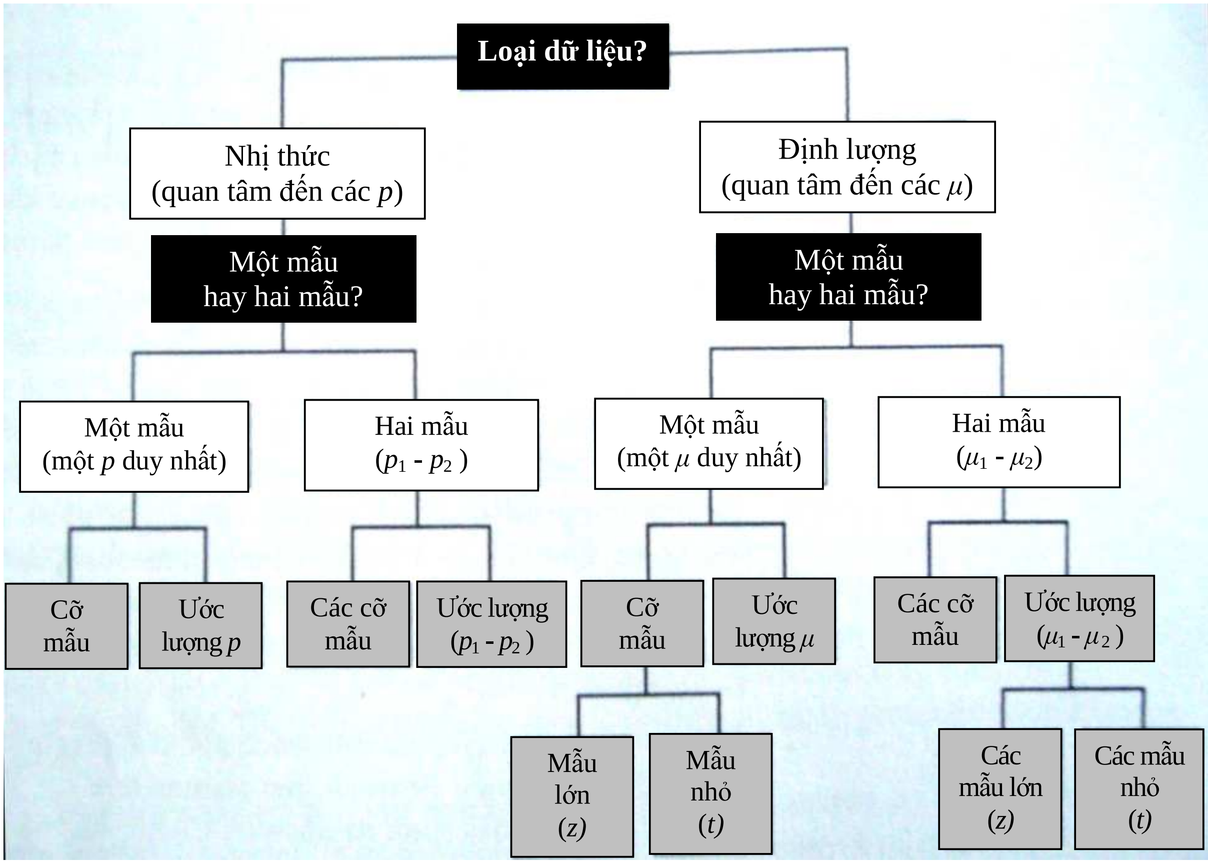
2. Bạn có mong muốn thực hiện một sự suy luận về một *tham số duy nhất p* hay μ, hay về *sự khác biệt giữa hai tham số* $(p_1 - p_2)$ hay $(\mu_1 - \mu_2)$? Đây là một câu hỏi dễ trả lời. Kiểm tra số lượng các mẫu có liên quan. Một mẫu hàm ý một sự suy luận về một tham số duy nhất, hai mẫu hàm ý sự so sánh của hai tham số.

3. Sau khi đã xác định (các) tham số có liên quan trong bài tập, các bạn phải xác định mục đích của bài tập. Đó sẽ hoặc là (a) chọn lựa cỡ mẫu cần thiết cho việc ước lượng một tham số với một giới hạn đã được xác định cụ thể đối với biên sai số hay (b) ước lượng một tham số (hay sự khác biệt giữa hai tham số). Mục đích này sẽ rất rõ ràng nếu nó là (a), bởi vì câu hỏi này sẽ yêu cầu hay hướng dẫn các bạn tìm kiếm "cỡ mẫu". Mục đích (b) cũng sẽ rõ ràng bởi vì bài tập này sẽ hướng dẫn cụ thể các bạn vào việc tìm kiếm một ước lượng một tham số (hay sự khác biệt giữa hai tham số).

4. Kiểm tra các điều kiện được yêu cầu cho phân phối mẫu của tham số sẽ được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn. Đối với các dữ liệu lượng hóa, thì cỡ hay các cỡ mẫu phải là 30 hay nhiều hơn. Đối với dữ liệu nhị thức, một cỡ mẫu lớn sẽ đảm bảo rằng $p \pm 2\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}$ được chứa đựng trong khoảng 0 đến 1 [hay $(p_1 - p_2) \pm 2\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}$ được chứa trong khoảng -1 đến 1 cho trường hợp hai mẫu.]

Để tóm tắt những mẹo này, thì quá trình tư duy của các bạn nên đi theo cây quyết định được trình bày trong Hình 7.10.

HÌNH **7.10** Cây quyết định



Bài tập Thêm

7.64 Phát biểu Định lý Giới hạn Trung tâm. Định lý Giới hạn Trung tâm có giá trị như thế nào trong sự suy luận thống kê?

7.65 Các giả định nào được thực hiện khi sử dụng kiểm tra *t* Student để xây dựng một khoảng tin cậy cho một số trung bình tổng thể duy nhất?

7.66 Các giả định nào được thực hiện khi sử dụng kiểm tra *t* Student để xây dựng một khoảng tin cậy cho sự khác biệt giữa hai số trung bình tổng thể?

7.67 Một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 64$ quan sát sở hữu một trung bình $\bar{x} = 29.1$ và một độ lệch chuẩn $s = 3.9$. Tìm ước lượng điểm cho trung bình tổng thể μ, và tìm biên sai số ước lượng.

7.68 Xem lại Bài tập 7.67, và tìm một khoảng tin cậy 90% cho μ.

7.69 Xem lại Bài tập 7.67. Có bao nhiêu quan sát cần có nếu các bạn muốn ước lượng μ với biên sai số ước lượng bằng với 0.5 với xác suất bằng 0.95?

7.70 Các mẫu ngẫu nhiên độc lập gồm $n_1 = 50$ và $n_2 = 60$ quan sát được chọn từ các tổng thể lần lượt là 1 và 2. Các cỡ mẫu và trị thống kê mẫu tính được được cho trong bảng đi kèm. Tìm khoảng tin cậy 90% cho sự khác biệt trong các số tổng thể, và giải thích khoảng này.

	Tổng thể	
	1	**2**
Cỡ mẫu	50	60
Trung bình của mẫu	100.4	96.2
Độ lệch chuẩn của mẫu	0.8	1.3

7.71 Xem lại Bài tập 7.70. Giả định rằng các bạn muốn ước lượng $(\mu_1 - \mu_2)$ chính xác trong giới hạn 0.2 với xác suất bằng 0.95. Nếu các bạn muốn sử dụng các cỡ mẫu, thì n_1 và n_2 phải lớn bao nhiêu?

7.72 Một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 500$ quan sát từ một tổng thể nhị thức tạo ra $x = 240$ lần thành công.

a. Tìm ước lượng điểm cho *p,* và tìm biên sai số.

b. Tìm khoảng tin cậy 90% của *p.*

7.73 Xem lại Bài tập 7.72. Một mẫu lớn bao nhiêu ắt sẽ được yêu cầu nếu các bạn muốn ước lượng *p* chính xác trong giới hạn 0.025 với xác suất bằng với 0.90?

7.74 Các mẫu ngẫu nhiên độc lập gồm $n_1 = 40$ và $n_2 = 80$ quan sát được chọn từ các tổng thể lần lượt là 1 và 2. Số lần thành công trong hai mẫu này là $x_1 = 17$ và $x_2 = 23.$ Tìm khoảng tin cậy 90% cho khác biệt giữa hai tỷ lệ tổng thể nhị thức này.

7.75 Xem lại Bài tập 7.74. Giả định rằng các bạn muốn ước lượng $(p_1 - p_2)$ chính xác trong giới hạn 0.06 với xác suất bằng 0.90 và rằng các bạn có kế hoạch sử dụng các cỡ mẫu bằng nhau, nghĩa là, $n_1 = n_2$. Vậy thì n_1 và n_2 phải lớn bao nhiêu?

7.76 Một sự chọn mẫu ngẫu nhiên các séc chi trội cho khách hàng của ngân hàng tại một ngân hàng địa phương tạo ra dữ liệu sau (tính bằng đôla và được làm tròn số).

302	512	97	316
69	16	133	701
107	156	401	14
465	72	128	68

Giả định rằng mức chung của các khoản chi trội của ngân hàng được kỳ vọng là ổn định trong tương lai trước mắt. Hãy sử dụng dữ liệu mẫu để tìm khoảng tin cậy 90% cho qui mô trung bình các séc chi trội của ngân hàng này.

7.77 Một máy bán nước giải khát không có cồn tự động được thiết kế để bơm ra, ở mức bình quân, một lượng là 7 aoxơ nước ngọt mỗi cốc. Trong một lần kiểm tra máy này, 10 chiếc cốc đầy nước ngọt được rút từ chiếc mày và đo lường. Trung bình và độ lệch chuẩn của 10 đại lượng này lần lượt là 7.1 aoxơ và 0.12 aoxơ. Tìm khoảng tin cậy 99% cho lượng bơm trung bình.

7.78 Hai mẫu ngẫu nhiên, mỗi mẫu chứa 11 đại lượng, được rút từ các tổng thể không chuẩn sở hữu các số trung bình lần lượt là μ_1 và μ_2, và một phương sai chung σ^2. Các số trung bình và phương sai của mẫu là như sau:

Tổng thể I	**Tổng thể II**
$\bar{x}_1 = 60.4$	$\bar{x}_2 = 65.3$
$s_1^2 = 31.40$	$s_2^2 = 44.82$

Tìm khoảng tin cậy 90% cho sự khác biệt giữa các số trung bình mẫu.

7.79 "Các khoản đầu tư lớn vào tự động hóa và công nghệ sẽ không mang lại hạnh phúc cho ngành công nghiệp chế tạo... Chính những cải thiện nhỏ bé, đơn giản đã làm cho Toyota trở thành công ty dẫn đầu thế giới về tính hiệu quả.", theo Trung tâm Hỗ trợ Cung ứng Toyota tại Lexington, Kentucky (Chappell, 1994). Nhóm này đã đi xuyên nước Mỹ để thảo luận các nguyên lý của Hệ thống Sản xuất Toyota với bất kỳ ai mà sẽ lắng nghe. Trong số hàng ngàn công ty cung ứng của Hoa Kỳ, chỉ có 22 trong số 391 công ty mà Toyota liên hệ là có yêu cầu sự trợ giúp. Nếu 391 công ty cung ứng này có thể được xem như là đại diện cho một mẫu ngẫu nhiên của các công ty cung ứng, hãy tìm một ước lượng của tỷ lệ của tất cả các công ty cung ứng của Hoa Kỳ mà có lẽ yêu cầu sự trợ giúp từ nhóm này. Biên sai số là bao nhiêu?

7.80 Mặc dù hầu hết người Mỹ nói rằng họ thích các bữa ăn nấu tại nhà hơn, thì 56% cho rằng họ thỉnh thoảng ăn tối tại một nhà hàng hay một nơi bán thức ăn nhanh vào cuối tuần. Một cuộc điều tra gần đây đã bộc lộ cho thấy rằng chỉ có 45% những người từ 60 tuổi trở lên đã ăn tối ở ngoài trong tuần trước đó, so với tỷ lệ 66% của những người trưởng thành dưới 30 tuổi. ("Most Restaurant Meals (*Phần lớn các bữa ăn tại nhà hàng)*", 1994). Giả định rằng những tỷ lệ phần trăm này được căn cứ trên hai mẫu mà mỗi mẫu có cỡ là 1200.

a. Các biên sai số đi cùng với những ước lượng về các tỷ lệ của những người từ 60 tuổi trở lên và những người trong độ tuổi dưới 30 mà đã ra ngoài ăn tối trong tuần trước đó?

b. Tìm một ước lượng điểm và biên sai số cho sự khác biệt về các tỷ lệ giữa những người từ 60 tuổi trở lên và những người dưới 30 tuổi mà đã ra ngoài ăn tối trong tuần trước đó.

7.81 Một mẫu ngẫu nhiên gồm 400 ngọn đèn đêm được kiểm tra, và 40 đèn được tìm thấy là có lỗi. Với hệ số tin cậy bằng với 0.90, hãy ước lượng khoảng mà trong giới hạn đó thì tỷ lệ thực sự các ngọn đèn bị lỗi rơi vào.

7.82 Kinh nghiệm trong quá khứ cho thấy rằng độ lệch chuẩn của thu nhập hàng năm của những công nhân dệt tại một tiểu bang cụ thể là $1000. Một mẫu các công nhân dệt lớn bao nhiêu mà một người ắt sẽ cần để chọn nếu người đó muốn ước lượng số trung bình tổng thể chính xác trong giới hạn $100.00 với xác suất bằng với 0.95? Biết rằng số trung bình của mẫu trong bài toán này là $14,800, hãy xác định các giới hạn tin cậy 95% cho số trung bình tổng thể.

7.83 Một người làm thí nghiệm muốn sử dụng số trung bình mẫu $\bar{x}$ để ước lượng trung bình của một tổng thể có phân phối chuẩn với một sai số thấp hơn 0.5 với xác suất bằng với 0.9. Nếu phương sai của tổng thể này là bằng với 4, thì mẫu này phải lớn bao nhiêu để đạt được sự chính xác này?

7.84 Một nghiên cứu về thời gian được lên kế hoạch nhằm ước lượng, chính xác trong giới hạn 4 giây với xác suất bằng 0.90, thời gian trung bình cho một công nhân hoàn tất một công việc lắp ráp. Nếu kinh nghiệm từ quá khứ gợi ý rằng $\sigma = 16$ giây đo lường sự thay đổi từ công nhân này sang công nhân khác về thời gian lắp ráp, thì có bao nhiêu công nhân, mỗi người thực hiện một hoạt động lắp ráp duy nhất, sẽ phải được đưa vào trong mẫu này?

7.85 Để ước lượng tỷ lệ các công nhân thất nghiệp tại tiểu bang Iowa, một nhà kinh tế đã chọn lựa ngẫu nhiên 400 người từ giai cấp lao động. Trong số này, 25 người là thất nghiệp.

a. Ước lượng tỷ lệ thực sự các công nhân thất nghiệp, và tìm biên sai số ước lượng.

b. Có bao nhiêu người phải được chọn mẫu nhằm giảm biên sai số xuống còn 0.02?

7.86 Sáu mươi trong số 87 những người nội trợ ưa thích bột giặt A hơn. Nếu 87 người nội trợ này đại diện cho một mẫu ngẫu nhiên từ tổng thể của tất cả những người mua sắm tiềm năng, hãy ước lượng tỷ lệ của tổng số người nội trợ ưa thích bột giặt A hơn. Sử dụng khoảng tin cậy 90%.

7.87 Một chủ nhiệm khoa các sinh viên mong muốn ước lượng chi phí bình quân của năm đại học đầu tiên tại một trường đại học cụ thể chính xác trong giới hạn $500.00 với xác suất là 0.95. Nếu một mẫu ngẫu nhiên các sinh viên năm thứ nhất sẽ được chọn lựa và yêu cầu giữ lại dữ liệu tài chính, thì có bao nhiêu sinh viên phải được đưa vào trong mẫu này? Giả định rằng ông chủ nhiệm khoa biết rằng dãy chi tiêu sẽ thay đổi từ xấp xỉ $4800 đến $13,000.

7.88 Tỷ lệ phần trăm số điểm D và F ban cho các sinh viên bởi hai giáo sư sử học tại một đại học được ông chủ nhiệm khoa lưu ý. Giáo sư I đạt được tỷ lệ 32% so với tỷ lệ 21% của giáo sư II, lần lượt căn cứ vào 200 và 180 sinh viên. Hãy ước lượng sự chênh lệch trong tỷ lệ phần trăm của các số điểm D và F ban cho sinh viên bởi hai giáo sư này. Biên sai số là bao nhiêu?

7.89 Giả định bạn mong muốn ước lượng sản lượng trung bình hàng giờ của một qui trình sản xuất ra một loại kháng sinh. Qui trình này được quan sát cho 100 giai đoạn hàng giờ được chọn lựa ngẫu nhiên, với các kết quả như sau:

$$\bar{x} = 34 \text{ aoxơ mỗi giờ} \qquad s = 3$$

Hãy ước lượng sản lượng trung bình hàng giờ cho qui trình này, sử dụng khoảng tin cậy 95%.

7.90 Một kỹ sư kiểm soát chất lượng muốn ước lượng tỷ lệ có lỗi trong một lô lớn các bóng đèn. Từ kinh nghiệm trước đó, ông ta cảm thấy rằng tỷ lệ thực sự của những sản phẩm bị lỗi phải nằm ở đâu đó quanh 0.2. Một mẫu lớn bao nhiêu mà ông ta phải chọn nếu ông ta muốn ước lượng tỷ lệ thực sự rơi vào trong 0.01, khi sử dụng khoảng tin cậy 95%?

7.91 Các mẫu gồm 400 pin AA được chọn từ mỗi trong số hai dây chuyền sản xuất, A và B. Số lượng sản phẩm có lỗi trong những mẫu này được cho trong bảng đi kèm. Hãy ước lượng sự khác biệt trong tỷ lệ thực tế các sản phẩm có lỗi cho hai dây chuyền này với khoảng tin cậy 0.90.

Dây chuyền	**Số lượng Sản phẩm có lỗi**
A	40
B	80

7.92 Hiệu quả đốt cháy bao nhiêu mà một người nội trợ kỳ vọng từ một lò sưởi chạy dầu? EPA xác định rằng mức 80% hay cao hơn là tuyệt vời, 755 đến 79% là tốt, 70% đến 74% là khá, và dưới 70% là kém. Một nhà thầu sưởi ấm cho nhà mà bán hai loại lò sưởi chạy dầu (ta gọi chúng là A và B) quyết định so sánh các mức độ hiệu quả trung bình của chúng. Một phân tích được thực hiện về mức độ hiệu quả cho 8 lò sưởi loại A và 6 lò loại B. Xếp hạng mức độ hiệu quả, tính bằng tỷ lệ phần trăm, cho 14 lò sưởi được cho trong bảng sau.

Loại A	72	78	73	69	75	74	69	75
Loại B	78	76	81	74	82	75		

a. Tìm khoảng tin cậy 90% cho $(\mu_A - \mu_B)$ và giải thích kết quả này.

b. Dựa trên các kết quả của câu (a), liệu bạn ắt sẽ kết luận rằng có một sự khác biệt trong xếp hạng mức độ hiệu quả trung bình cho hai loại lò sưởi này không? Giải thích.

7.93 Một sự kiểm tra sổ sách được tiến hành nhằm ước lượng sự khác biệt trong sự hao hụt (mất mát do mất cắp, hư hỏng, v.v) trung bình tính theo tỷ lệ phần trăm về hàng tồn kho tại hai cửa hàng bách hóa tổng hợp. Một trăm mặt hàng được chọn lựa ngẫu nhiên trong nội bộ từng cửa hàng, và tỷ lệ phần trăm của mỗi mặt hàng đang có trong tay, để so sánh với tổng số được ghi vào hồ sơ hàng tồn kho, được ghi nhận. Trung bình và độ lệch chuẩn của sự hao hụt tính theo tỷ lệ phần trăm giữa hai cửa hàng bách hóa tổng hợp này, sử dụng khoảng tin cậy 95%. Căn cứ vào khoảng này, liệu bạn ắt sẽ kết luận rằng có một sự khác biệt trong sự hao hụt trung bình tính theo tỷ lệ phần trăm giữa hai cửa hàng này không?

	Cửa hàng Bách hóa	
	1	**2**
Cỡ mẫu	100	100
Trung bình của mẫu	5.3	6.4
Độ lệch chuẩn của mẫu	2.7	2.9

7.94 Tiêu chuẩn liên bang hiện đang có hiệu lực yêu cầu bộ phận đỡ va chạm trên xe hơi phải giữ cho thân xe không bị hư hỏng khi chịu tác động va chạm phía trước và phía sau vào chướng ngại vật bằng phẳng khi chạy với tốc độ 2.5 mph. Tuy nhiên, không có tiêu chuẩn liên bang tối thiểu cho xe gia đình, mặc cho sự kiện rằng vào năm 1992 có nhiều hơn một trong số mười người mua chọn mua một chiếc xe gia đình ("Passenger Van Bumpers (*Các bộ phận đỡ va chạm trên xe gia đình*", 1994). Trong một cuộc kiểm tra người tiêu dùng về bảy nhãn hiệu/mẫu xe gia đình phổ biến, thì các chi phí sửa chữa sau đây phản ảnh tổng chi phí sửa chữa hư hỏng gây ra từ sự va chạm phía trước và phía sau vào một chướng ngại vật, một sự va chạm từ phía trước vào một chướng ngại vật nghiêng, và một sự va chạm từ phía sau vào một cái cột:

$1862   2554   3693   4082   4505   4601   7643

a. Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của $n = 7$ chi phí sửa chữa.

b. Tính toán ước lượng khoảng tin cậy 95% của các chi phí sửa chữa tổng thể cho các xe gia đình được đại diện trong mẫu này.

c. Sử dụng bản in Minitab được cho dưới đây để khẳng định các kết quả của các câu (a) và (b).

```
             N   Trung        •• l•ch      Trung bình     95.0 Ph•n tr•m C.I.
                 bình         chu•n        sai s• chu•n
Phí t•n      7   4173         1842         696            (    2469,    5877)
```

7.95 Biết rằng sự bảo toàn năng lượng là rất quan trọng, nên một số nhà khoa học nghĩ rằng chúng ta phải có một sự xem xét kỹ lưỡng hơn đối với chi phí (về năng lượng) trong việc sản xuất một số loại hình thực phẩm khác nhau. Một nghiên cứu gần đây so sánh lượng dầu mỏ trung bình cần thiết để sản xuất ra 1 mẫu Anh các loại hình cây trồng khác nhau. Ví dụ, chúng ta giả định rằng chúng ta muốn so sánh khối lượng dầu mỏ trung bình để sản xuất ra 1 mẫu Anh bắp so với 1 mẫu Anh súp lơ. Số đo bằng thùng (khoảng 150 lít) dầu mỏ mỗi mẫu Anh, dựa trên những thửa đất 20 mẫu Anh, bảy thửa cho mỗi cây trồng, được cho trong bảng sau. Sử dụng dữ liệu này để tìm ra khoảng tin cậy 90% cho sự khác biệt về số các khối lượng dầu mỏ trung bình cần thiết để sản xuất ra hai loại cây trồng này.

Bắp	5.6	7.1	4.5	6.0	7.9	4.8	5.7
Súp lơ	15.9	13.4	17.6	15.8	15.8	16.3	17.1

7.96 Chiều dài thời gian từ lúc ghi hóa đơn đến khi nhận được khoản chi trả được ghi nhận cho một mẫu ngẫu nhiên gồm 100 khách hàng của một công ty kiểm toán. Trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu cho 100 khách hàng này lần lượt là 39.1 ngày và 17.3 ngày. Tìm khoảng tin cậy 90% cho thời gian trung bình từ lúc ghi hóa đơn đến khi nhận được khoản chi trả cho tất cả các khách hàng của công ty kiểm toán đó. Giải thích khoảng này.

7.97 Xem lại Bài tập 7.96. Một sự so sánh về thời gian trung bình từ lúc ghi hóa đơn đến khi nhận được khoản chi trả được thực hiện bằng cách chọn lựa các mẫu ngẫu nhiên gồm 30 khách hàng, mỗi mẫu từ tổng thể gồm tất cả các khách hàng cá nhân và từ tổng thể các khách hàng doanh nghiệp. Các cỡ mẫu, số trung bình, và độ lệch chuẩn cho hai mẫu này được cho trong bảng đi kèm sau đây. Tìm khoảng tin cậy 95% cho sự khác biệt về thời gian trung bình để chi trả giữa các khách hàng cá nhân và doanh nghiệp.

	Khách hàng Cá nhân	**Khách hàng Doanh nghiệp**
Cỡ mẫu	100	100
$\bar{x}$	5.3	6.4
s	2.7	2.9

7.98 Xem lại Bài tập 7.97. Có bao nhiêu khách hàng của từng loại ắt đã phải được chọn mẫu (với các cỡ mẫu bằng nhau) nếu bạn muốn ước lượng sự khác biệt về thời gian trung bình để chi trả chính xác trong giới hạn 5 ngày với xác suất xấp xỉ bằng với 0.95?

7.99 Những công ty quảng cáo trên truyền hình có lẽ đã tin tưởng một cách sai lầm rằng hầu hết người xem hiểu phần lớn mẫu quảng cáo mà họ xem và nghe được. Một điều tra nghiên cứu gần đây sử dụng 2300 người xem ở độ tuổi trên 13. Mỗi người xem nhìn các trích đoạn quảng cáo trên truyền hình dài 30 giây. Trong số này, 1914 người xem đã hiểu sai tất cả hay một phần của các trích đoạn này. Hãy tìm khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ tất cả người xem (mà trong đó mẫu này có tính đại diện) mà sẽ hiểu sai toàn bộ hay một phần các trích đoạn quảng cáo trên truyền hình được sử dụng trong nghiên cứu này.

7.100 Xe điện mới *Tropica* đã được đo bởi Ủy ban Tài nguyên Không khí California để có kết quả là một quãng đường đi trung bình 44.7 dặm. ("Thinking Cheaper (*Suy nghĩ về Rẻ hơn*), 1994). Trong Bài tập 2.13, một bài kiểm tra độc lập gồm 30 lần thử tạo ra các quãng đường đi trung bình như sau:

45.4	45.9	45.3	42.9	45.8
44.6	55.7	46.4	45.7	45.9
44.1	47.1	46.4	44.3	47.3
46.8	44.2	45.5	45.0	46.4
43.5	46.6	44.5	44.8	44.3
47.0	44.6	43.3	46.1	43.8

Dựa vào bản in Minitab sau đây, sử dụng một qui trình ước lượng thích hợp để kiểm tra hay tranh luận về quãng đường đi trung bình 44.7 dặm được báo cáo bởi Ủy ban Tài nguyên Không khí California.

	N	Trung bình	Trung v•	Trung bình TR	•• l•ch chu•n	Trung bình sai s• chu•n
Các quãng •••ng •i	30	45.273	45.350	45.292	1.199	0.219

	T•i thi•u	T•i •a	Q1	Q3
Các quãng •••ng •i	42.900	47.300	44.300	46.400

7.101 Tốc độ mà một máy tính cá nhân có thể thực hiện các công việc khác nhau là một giá trị để bán hàng hết sức quan trọng cho các nhãn hiệu và mẫu mã máy tính khác nhau cũng như là cho các nền tảng mà hỗ trợ các chương trình ứng dụng. Dữ liệu sau đây phản ảnh thời gian (tính bằng giây) để tải chương trình Ami Pro 2.0 trên một máy tính cá nhân IBM PS/2 Model 90 486 DX/33 sử dụng các chương trình Standard Windows và Enhanced Windows. Sử dụng một qui trình ước lượng phù hợp để xác định liệu thật sự có một sự khác biệt giữa thời gian trung bình để tải chương trình Ami Pro 2.0 khi sử dụng các chương trình Standard Windows và Enhanced Windows.

Standard		Enhanced	
1.56	1.20	1.59	0.96
1.41	1.38	1.68	1.09
1.48	1.54	1.17	1.26
1.37	1.41	0.94	1.23
1.39	1.16	1.56	1.30

Sử dụng các Bộ Dữ liệu tại http://swlearning.com

7.102 Tham khảo bộ dữ liệu A. Đối với một loại khoa *cố định*, hãy chọn hai mẫu ngẫu nhiên về tiền lương với cỡ mẫu n = 50, một từ khoa nam và một từ khoa nữ.

a. Ước lượng sự khác biệt về tiền lương trung bình đối với giảng viên nam so với giảng viên nữ bằng cách sử dụng khoảng tin cậy 95% dựa trên cách tiếp cận mẫu lớn (Định lý Giới hạn Trung tâm).

b. Chọn một loại khoa khác và lặp lại câu (a) với các cỡ mẫu n = 30 cho cả giảng viên nam lẫn giảng viên nữ bằng cách sử dụng cách tiếp cận mẫu lớn.

7.103 Tham khảo bộ dữ liệu B. Chọn một mẫu ngẫu nhiên gồm $n_1 = 10$ quan sát về các trọng lương tươi thuộc loại 1 (mã hóa 0) và $n_2 = 10$ quan sát về các trọng lượng tươi thuộc loại 2 (mã hóa 1).

a. Sử dụng cách tiếp cận mẫu nhỏ dựa trên phân phối t để tìm ước lượng khoảng tin cậy 99% của $\mu_1 - \mu_2$, sự khác biệt thực sự trong các trọng lượng tươi trung bình của búp bông cải xanh.

b. Lựa chọn một biến khác trong trọng lượng thị trường, trọng lượng khô, và đường kính búp và lặp lại câu (a).

7.104 Tham khảo bộ dữ liệu C. Trung bình và độ lệch chuẩn thực tế của kỳ hạn chi trả bình quân tính bằng ngày là $\mu = 38.56$ và $\sigma = 14.224$.

a. Xem xét các kỳ hạn chi trả bình quân cho 694 quỹ đầu tư thị trường tiền tệ là tổng thể cần quan tâm và chọn ra một mẫu ngẫu nhiên có cỡ là 30 từ tổng thể này (sử dụng bảng số ngẫu nhiên, Bảng 13, trong Phụ lục II).

b. Sử dụng mẫu từ câu (a) để xây dựng một khoảng tin cậy 99% cho μ. Liệu khoảng tin cậy này có bao quanh giá trị đúng, $\mu = 38.56$ không?

c. Chọn ra một mẫu ngẫu nhiên khác có cỡ là 30 và xây dựng một khoảng tin cậy 99% khác cho μ. Liệu khoảng này có bao quanh μ không?

d. Nói chung, tỷ lệ nào của các khoảng được lập nên theo cách này mà bạn ắt kỳ vọng sẽ bao quanh giá trị $\mu = 38.56$?