CHƯƠNG 6

CÁC PHÂN PHỐI CHỌN MẪU

Về chương này

Trong các chương trước, chúng ta đã thảo luận về một số biến số ngẫu nhiên hữu dụng và những phân phối xác suất của chúng. Trong các tình huống chọn mẫu thực tế, chúng ta thường không chọn mẫu một giá trị duy nhất của x. Thay vào đó, chúng ta chọn một mẫu gồm n giá trị và sau đó sử dụng những giá trị này để tính toán các số liệu thống kê ví dụ như trung bình mẫu và độ lệch chuẩn. Rồi chúng ta sử dụng những số liệu thống kê này để suy ra lượng dân số được được chọn mẫu. Mục tiêu của chương này là nghiên cứu một số số liệu thống kê hữu ích và các phân phối xác suất của chúng. Sau đó chúng ta sẽ giải thích tại sao, trong các điều kiện khá tổng quát, thì tất cả những số liệu thống kê này sở hữu các phân phối xác suất mà có thể được ước lượng xấp xỉ bởi đường cong chuẩn tắc. Trong các chương tiếp sau, chúng ta sẽ trình bày cách thức mà số liệu thống kê chọn mẫu và các phân phối của chúng được sử dụng để suy ra lượng dân số được chọn mẫu.

NGHIÊN CỨU ĐIỂN HÌNH

CHỌN MẪU RULÉT Ở MONTE CARLO

Bạn muốn thử sử dụng đôi tay của mình khi đánh bạc mà không phải chịu rủi ro bị thua bạc như thế nào? Bạn có thể làm điều này bằng cách mô phỏng qui trình đánh bài, thực hiện các lần đặt cược tưởng tượng và quan sát kết quả. Nếu bạn phải lặp đi lặp lại rất nhiều lần việc mô phỏng này, bạn ắt sẽ có thể xem cách thức mà những lần thắng bài của bạn thay đổi ra sao nếu như bạn phải chơi bài "thực sự".

Kỹ thuật mô phỏng một qui trình mà chứa đựng các yếu tố ngẫu nhiên và lặp đi lặp lại quá trình này để xem nó diễn tiến ra sao được gọi là **qui trình Monte Carlo.** Đây là một thủ thuật được sử dụng rộng rãi trong kinh doanh và các lĩnh vực khác để nghiên cứu các đặc trưng của một hoạt động mà chịu nhiều ảnh hưởng ngẫu nhiên, ví dụ như thời tiết hay hành vi con người. Ví dụ, bạn có thể mô hình hóa cách hoạt động của hàng tồn kho của một công ty chế tạo bằng cách tạo ra trên giấy tờ những lần nhập và xuất hàng hàng ngày về sản phẩm chế tạo từ kho hàng của công ty đó. Mỗi ngày, một con số ngẫu nhiên các mặt hàng được công ty đó sản xuất ra sẽ được nhập vào hàng tồn kho. Tương tự như vậy, mỗi ngày thì một con số ngẫu nhiên các đơn hàng gồm đủ cỡ ngẫu nhiên khác nhau sẽ được chuyển đi giao hàng. Dựa trên việc nhập và xuất các mặt hàng, bạn có thể tính toán lượng hàng tồn kho, số lượng mặt hàng đang có trong tay vào cuối mỗi ngày. Những giá trị của các biến số ngẫu nhiên - số lượng mặt hàng được sản xuất ra, số lượng đơn hàng, và số lượng mặt hàng mỗi đơn hàng cần thiết cho sự mô phỏng của mỗi ngày - có thể có được từ sự phân phối theo lý thuyết của các quan sát mà mô hình hóa gần sát những phân phối tương ứng của các biến số mà đã được quan sát theo thời gian trong hoạt động chế tạo. Bằng cách lặp lại sự mô phỏng về việc cung ứng và giao hàng và sự tính toán hàng tồn kho hàng ngày cho một số lượng lớn ngày (một sự chọn mẫu về điều ắt có thể xảy ra), bạn có thể quan sát được cách thức hoạt động của hàng tồn kho hàng ngày của một nhà máy. Thủ thuật Monte Carlo đặc biệt có giá trị bởi vì nó làm cho nhà chế tạo có khả năng thấy được cách thức hàng tồn kho hàng ngày sẽ hoạt động thế nào khi một số thay đổi nhất định nào đó được thực hiện trong cách thức cung ứng hàng hay trong một khía cạnh khác nào đó về hoạt động này mà có thể được kiểm soát.

Trong một bài báo có nhan đề, "The Road to Monte Carlo (*Con đường đi đến thủ thuật Monte Carlo*)", Daniel Seligman lưu ý rằng mặc dù kỷ thuật Monte Carlo được sử dụng rộng rãi trong các trường kinh doanh nhằm nghiên cứu việc hoạch định vốn, kế hoạch hàng tồn kho, và quản lý dòng tiền, thì dường như chưa có một ai đã từng sử dụng qui trình này để nghiên cứu xem chúng ta có thể làm tốt đến đâu nếu như phải đánh bạc tại Monte Carlo.

Để tiếp tục thực hiện ý nghĩ này, Seligman đã lập trình trên máy tính cá nhân của mình để mô phỏng trò chơi rulét. Rulét bao gồm một vòng quay mà viền của nó được chia thành 38 ô. Ba mươi sáu ô này được đánh số từ 1 đến 35 và được sơn xen kẽ màu đỏ và đen. Hai ô còn lại được sơn màu xanh và được đánh số là 0 và 00. Để chơi trò này, bạn đặt cược một khoản tiền nào đó vào một hay nhiều ô. Vòng quay được xoay tròn và di chuyển cho đến khi nó dừng lại. Một quả bóng rơi vào một kho trên vòng quay để chỉ ra con số thắng cuộc. Nếu như bạn đặt tiền vào con số đó, thì bạn sẽ thắng được một khoản tiền cụ thể. Ví dụ, nếu bạn đặt cược vào con số 20, và tỷ lệ cược là 1 ăn 35. Nếu vòng quay không dừng ở ô của bạn, thì bạn sẽ thua khoản tiền cược. Seligman quyết định xem cách mà số tiền thắng cược (hay thua cược) hàng đêm của ông ta sẽ ra sao nếu ông ta đặt cược 5 USD ở mỗi lần quay của vòng quay và lặp lại qui trình này 200 lần mỗi đêm. Ông ta đã lặp lại việc này 365 lần, qua đó mô phỏng các kết quả của 365 đêm tại sòng bạc. Không ngạc nhiên chút nào khi biết rằng trung bình "thắng cược" mỗi một đêm tốn 1.000 USD tiền đánh bài là một khoản thua bạc trị giá 55 USD, số tiền bình quân của các lần thắng bài mà nhà cái giữ lại. Điều ngạc nhiên theo Seligman là sự thay đổi quá mức của "số tiền thắng cược" hàng đêm. Bảy lần trong số 365 đêm, con bạc không có thật này thua tổng cộng 1.000 USD tiền cược, và ông ta thắng một khoản lớn nhất 1.160 USD chỉ một lần duy nhất. Một trăm năm mươi mốt lần thua cuộc đã vượt quá con số 250 USD.

Quá nhiều cho Monte Carlo và đánh bạc. Mối quan tâm của chúng ta đối với thủ thuật Monte Carlo là việc sử dụng nó trong nghiên cứu hành vi của **các số liệu thống kê chọn mẫu.** Bởi vì chúng ta sẽ sử dụng các số liệu thống kê chọn mẫu để suy ra các tham số về dân số, cho nên chúng ta se muốn biết xem cách thức chúng vận hành ra sao trong việc chọn mẫu được lặp lại. Điều này có thể thực hiện được bằng cách sử dụng thủ thuật Monte Carlo - chọn mẫu, quan sát giá trị của một con số thống kê, và sau đó lặp đi lặp lại qui trình này nhiều lần.

Trong chương này chúng ta khảo cứu các đặc trưng của một số con số thống kê hữu ích. Trong Phần 6.6 chúng ta lưu ý rằng giá trị của một lần thắng cược một đêm trong mô phỏng của Seligman về việc đánh bạc Monte Carlo bản thân nó là một con số thống kê, tổng của số tiền thắng và thua cược cho 200 lần cược với 5 USD mỗi lần. Sau đó chúng ta sử dụng kiến thức của mình về cách thức vận hành của một con số tổng trong mẫu để quyết định liệu Seligman đã quan sát thấy một con số không chắc xảy ra về những lần thua cược lớn hay không.

6.1 GIỚI THIỆU

Trong các chương trước, chúng ta đã nghiên cứu các biến số ngẫu nhiên và phân phối xác suất của chúng. Chúng ta đã trình bày nhiều phân phối xác suất rời rạc và liên tục mà là những mô hình khả dĩ cho các tình huống thực tế. Những phân phối xác suất này tùy thuộc vào những thước mang tính mô tả được gọi là *những tham số,* ví dụ như trung bình số dân hay độ lệch chuẩn.

Bằng cách nào mà chúng ta có thể áp dụng những mô hình xác suất này vào thực tiễn của các số liệu thóng kê? Thông thường, chúng ta có thể quyết định loại hình phân phối xác suất nào có thể phục vụ như là một mẫu hình trong một tình huống cho trước; các giá trị của những tham số mà xác định cụ thể một cách chính xác phân phối này là không sẵn có. Trong những tình huống như trên, chúng ta dựa vào *mẫu* để cung cấp thông tin về các tham số dân số chưa biết này.

Cách thức mà một mẫu được chọn được gọi là *phương án chọn mẫu* hay *thiết kế thử nghiệm* và quyết định số lượng thông tin trong mẫu. Ngoài ra, qua việc biết được phương án chọn mẫu được sử dụng trong một tình huống cụ thể, chúng ta có thể quyết định xác suất của việc quan sát các mẫu cụ thể. Những xác suất này cho phép chúng ta đánh giá độ tin cậy hay tính tốt của các kết luận được suy ra căn cứ trên các mẫu này.

Chọn mẫu ngẫu nhiên đơn giản là một phương án chọn mẫu được sử dụng phổ biến mà trong đó mọi mẫu có độ lớn *n* đều có cùng cơ may được chọn. Ví dụ, giả định chúng ta muốn chọn một mẫu có độ lớn $n = 2$ từ một dân số gồm $N = 4$ vật thể. Nếu bốn vật thể này được xác định bởi các ký hiệu x_1, x_2, x_3 và x_4, và có sáu cặp riêng biệt có thể được chọn:

Mẫu	Các quan sát trong mẫu
1	x_1, x_2
2	x_1, x_3
3	x_1, x_4
4	x_2, x_3
5	x_2, x_4
6	x_3, x_4

Nếu mẫu gồm $n = 2$ quan sát được chọn để cho mỗi trong số sáu mẫu có cùng cơ hội được chọn, tức là đều có xác suất 1/6, thì mẫu tạo ra sẽ được gọi là **mẫu ngẫu nhiên đơn giản,** hay đơn giản là **mẫu ngẫu nhiên.**

Ta có thể cho rằng[*] con số của các cách chọn một mẫu gồm *n* yếu tố từ một dân số bao gồm *N* yếu tố được cho bởi:

$$C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

trong đó $n! = n(n-1)...(3)\,(2)\,(1)$ và $0! = 1$. Ký hiệu C_n^N đại diện cho số mẫu riêng biệt, không được sắp xếp trật tự của kích cỡ *n* được chọn mà *không có sự thay thế*. Khi $N = 4$ và $n = 2$, chúng ta đã chứng tỏ rằng có

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2.1}{(2.1)(2.1)} = 6$$

các mẫu riêng biệt. Nếu chúng ta thực hiện một cuộc trưng cầu ý kiến của 5.000 người dựa vào một mẫu có độ lớn $n = 50$, thì có C_{50}^{5000} những sự kết hợp khác nhau của 50 người mà có thể được chọn trong mẫu này. Nếu mỗi trong số những kết hợp này có một cơ hội ngang nhau được chọn trong phương án chọn mẫu, thì mẫu này sẽ là *mẫu ngẫu nhiên đơn giản*.

ĐỊNH NGHĨA

Nếu một mẫu gồm *n* yếu tố được chọn từ một dân số gồm *N* yếu tố bằng cách sử dụng phương án chọn mẫu mà trong đó mỗi trong số C_n^N mẫu có cơ hội ngang nhau được chọn, thì việc chọn mẫu này được cho là **ngẫu nhiên** và mẫu tạo rao là một **mẫu ngẫu nhiên đơn giản.**

Thật là dễ hiểu về ý nghĩa của việc chọn mẫu ngẫu nhiên, nhưng sẽ khó khăn hơn nhiều khi phải thật sự chọn một mẫu ngẫu nhiên trong một tình huống thực tế. Một kiến thức về khái niệm chọn mẫu ngẫu nhiên là cần thiết cho một số tình huống chọn mẫu trong chương này; tuy nhiên, vấn đề của việc chọn thật sự các mẫu ngẫu nhiên được trì hoãn đến Phần 14.2.

[*] Một sự hiểu biết về sự suy ra này không đóng vai trò tối quan trọng trong thảo luận của chúng ta.

6.2 CÁC PHÂN PHỐI CHỌN MẪU CỦA SỐ LIỆU THỐNG KÊ

Các thước đo mô tả về con sớ được tính từ một mẫu được gọi là **số liệu thống kê.** Bởi vì những giá trị của các số liệu thống kê mẫu này là không đoán trước được và thay đổi tùy theo mẫu, cho nên chúng là *các biến số ngẫu nhiên* và có một *phân phối xác suất* mà mô tả cách thức hoạt động của chúng trong việc chọn mẫu được lặp lại. Phân phối xác suất này, được gọi là **phân phối chọn mẫu của số liệu thống kê,** cho phép chúng ta xác định độ tốt của bất cứ kết luận nào được suy ra căn cứ trên con số thống kê này.

ĐỊNH NGHĨA

Phân phối chọn mẫu của một con số thống kê là phân phối xác suất cho tất cả các giá trị khả dĩ của con số thống kê đó mà tạo ra khi các mẫu ngẫu nhiên có độ lớn *n* được rút ra một cách lặp đi lặp lại từ một lượng dân số.

Ví dụ, giả định rằng *N* = 4 yếu tố trong một dân số được mô tả trong Phần 6.1, được cho bởi các giá trị bằng số $x_1=4, x_2=2, x_3=5$ và $x_4=1$. Phân phối chọn mẫu cho trung bình mẫu, $\bar{x}$, khi chọn ngẫu nhiên n = 2 yếu tố *với sự thay thế* từ dân số này có thể được tìm ra bằng cách tính toán $\bar{x}$ cho mỗi trong số 16 mẫu này, như được trình bày trong Bảng 6.1. Do mỗi trong số các mẫu này đều có khả năng xảy ra ngang nhau, cho nên mỗi trong số 16 giá trị $\bar{x}$ có xác suất $p(\bar{x})=1/16$. Phân phối xác suất của phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ được cho trong Bảng 6.2 và được vẽ đồ thị trong Hình 6.1.

BẢNG 6.1 **Tính toán $\bar{x}$ cho 16 mẫu khả dĩ có độ lớn *n* = 2**

Mẫu	**Các quan sát trong mẫu**	$\bar{x}$	**Mẫu**	**Các quan sát trong mẫu**	$\bar{x}$
1	4, 4	4	9	5, 4	4.5
2	4, 2	3	10	4, 2	3.5
3	4, 5	4.5	11	5, 5	5
4	4, 1	2.5	12	5, 1	3
5	2, 4	3	13	1, 4	2.5
6	2, 2	2	14	1, 2	1.5
7	2, 5	3.5	15	1, 5	3
8	2, 1	1.5	16	1, 1	1

BẢNG 6.2 **Phân phối chọn mẫu cho $\bar{x}$**

$\bar{x}$	$p(\bar{x})$
1	1/16
1.5	2/16
2	1/16
2.5	2/16
3	4/16
3.5	2/16
4	1/16
4.5	2/16
5	1/16

HÌNH 6.1. **Phân phối chọn mẫu cho $\bar{x}$**

Phân phối xác suất của $\bar{x}$ trong Hình 6.1 là đối xứng đối với giá trị $\bar{x}$ =3, mà trên thực tế là trung bình hay giá trị bình quân của phân phối chọn mẫu này, bởi vì:

$$E(\bar{x}) = \sum \bar{x}p(\bar{x})$$
$$= 1\left(\frac{1}{16}\right) + 1{,}5\left(\frac{2}{16}\right) + 2\left(\frac{1}{16}\right) + \ldots + 4{,}5\left(\frac{2}{16}\right) + 5\left(\frac{1}{16}\right) = 3$$

khi sử dụng công thức được trình bày trong Phần 3.6. Chúng ta cũng lưu ý rằng giá trị bình quân của $\bar{x}$ là bằng với μ, trung bình dân số, mà chúng ta có thể tính bằng

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{4+2+5+1}{4} = 3$$

Trung bình mẫu, độ lệch chuẩn, trung vị, và các thước đo bằng số khác được tính từ những giá trị mẫu này có thể được sử dụng không chỉ để mô tả mẫu mà còn để suy ra các kết luận dưới dạng những ước lượng hay tiêu chuẩn về các tham số dân số tương ứng. Tuy thế, chúng ta phải biết được *phân phối chọn mẫu của con số thống kê* nhằm trả lời các câu hỏi ví dụ như: Liệu con số thống kê có ước lượng một cách nhất quán quá thấp hay quá cao giá trị của tham số này không? Liệu con số thống kê này có ít thay đổi hơn so với các tham số cạnh tranh khác, và vì vậy hữu ích hơn khi đóng vai trò như là một vật ước lượng?

Phân phối chọn mẫu của một con số thống kê có thể được suy ra bằng toán học hay được ước lượng bằng thực kinh nghiệm. Những ước lượng thực nghiệm bằng cách sử dụng kỹ thuật Monte Carlo được mô tả trong phần nghiên cứu tình huống được tìm ra bằng cách rút ra một số lượng lớn các mẫu có độ lớn *n* từ dân số đã được xác định, tính toán giá trị của con số thống kê này cho từng mẫu, và đưa vào bảng các kết quả trong một biểu đồ tần suất tương đối. Khi số lượng mẫu là lớn, thì biểu đồ tần suất tương đối sẽ ước lượng gần đúng sự phân phối mẫu theo lý thuyết. Nói cách khác, **đối với một số con số thống kê mà là tổng hay trung bình của các giá trị mẫu, thì một định lý quan trọng mà chúng tôi giới thiệu trong phần kế tiếp sẽ cho phép chúng ta ước lượng xấp xỉ các phân phối chọn mẫu của chúng khi kích thước mẫu là lớn.**

6.3 ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM VÀ PHÂN PHỐI CHỌN MẪU CỦA TRUNG BÌNH MẪU

Phân phối mẫu của trung bình mẫu $\bar{x}$ sở hữu một số đặc trưng duy nhất. Nếu một mẫu ngẫu nhiên gồm *n* quan sát được chọn ra từ một dân số có trung bình μ (giống như trung bình của dân số được chọn mẫu) và một độ lệch chuẩn bằng với $\sigma/\sqrt{n}$. (Độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu của một con số thông kê đôi lúc được gọi là **sai số chuẩn** của con số thống kê đó. Vì vậy độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu của trung bình mẫu đôi khi được gọi là **sai số chuẩn của trung bình.**) Nhưng đặc trưng quan trọng nhất là một kết quả được biến đến trong thống kê học là **Định lý Giới hạn Trung tâm.** Định lý này, mà áp dụng cho cả trung bình mẫu $\bar{x}$ lẫn giá trị tổng mẫu $\sum_{i=1}^{n} x_i$, phát biểu rằng khi kích thước mẫu *n* là lớn, thì phân phối chọn mẫu của trung bình mẫu (không có giá trị tổng) sẽ sở hữu xấp xỉ một phân phối chuẩn tắc. Định lý Giới hạn Trung tâm được phát biểu chính thức trong phần sau.

Định lý Giới hạn Trung tâm

Nếu các mẫu ngẫu nhiên gồm *n* quan sát được rút ra từ một dân số không chuẩn tắc với trung bình có hạn μ và độ lệch chuẩn σ, thì khi *n* lớn, phân phối chọn mẫu của trung bình mẫu $\bar{x}$ được **phân phối xấp xỉ chuẩn tắc với trung bình và độ lệch chuẩn**[+]

[+] Khi các mẫu được lặp lại có độ lớn *n* được chọn ngẫu nhiên từ một dân số *có hạn* với *N* yếu tố mà trung bình của chúng là μ và phương sai của chúng là σ^2, thì độ lệch chuẩn của $\bar{x}$ là:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \text{và} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ước lượng xấp xỉ này sẽ trở nên ngày càng chính xác hơn khi *n* ngày càng lớn hơn.

Định lý Giới hạn Trung tâm có thể được trình bày lại để áp dụng cho **giá trị tổng của các thước đo mẫu,**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

mà, khi *n* trở nên lớn, thì cũng có xu hướng sở hữu một phân phối chuẩn tắc, trong chọn mẫu lặp lại, với trung bình $n\mu$ và độ lệch chuẩn $\sigma\sqrt{n}$.

Trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ có thể được suy ra và Định lý Giới hạn Trung tâm có thể được chứng minh về toán học, nhưng các bằng chứng thực tế là vượt quá tầm của bài viết này. Tuy nhiên, chúng ta có thể trình bày một số thực nghiệm Monte Carlo mà tạo thêm những ủng hộ cho những điều khẳng định của chúng ta.

Hình 6.2 thể hiện phân phối xác suất cho con số *x* quan sát được khi tung một con xúc xắc duy nhất. Trung bình của phân phối này là μ = 3.5, và độ lệch chuẩn của nó là σ = 1.71 (được tìm ra trong Bài tập 3.51). Như vậy, Hình 6.2 là phân phối theo lý thuyết của một dân số gồm những lần tung xúc xắc - nghĩa là, phân phối của các quan sát có được nếu một con xúc xắc công bằng được tung đi tung lại một số lần vô cùng lớn.

HÌNH 6.2 **Phân phối xác suất cho *x*, con số xuất hiện trong một lần tung xúc xắc**

Bây giờ giả sử rằng chúng ta muốn ước lượng xấp xỉ phân phối chọn mẫu cho trung bình $\bar{x}$ của một mẫu gồm *n* = 5 quan sát được chọn từ lượng dân số tung xúc xắc. Chúng ta có thể có được ước lượng xấp xỉ này bằng cách thực hiện một thí nghiệm Monte Carlo. Bước đầu tiên chúng ta rút ra một mẫu gồm *n* = 5 thước đo từ lượng dân số này bằng cách tung con xúc xắc năm lần và quan sát các con số *x* = 3, 5, 1, 3 và 2. Sau đó chúng ta lặp lại quá trình chọn mẫu này, mỗi lần rút ra *n* = 5 quan sát và ghi nhận chúng, tổng cộng là 100 mẫu. Một trăm bộ các quan sát mẫu này, cùng với các giá trị tổng và trung bình mẫu, được ghi lại trong Bảng 6.3.

Biểu đồ tần suất tương đối cho 100 giá trị trung bình của mẫu này, được trình bày trong Hình 6.3, là một ước lượng xấp xỉ cho phân phối chọn mẫu cho trung bình $\bar{x}$ của một mẫu ngẫu nhiên gồm *n* = 5 lần tung xúc xắc. Ước lượng xấp xỉ này ắt đã tốt hơn (hình dạng biểu đồ cân đối hơn) nếu như chúng ta đã lặp lại thủ thuật Monte Carlo của mình một số lần nhiều hơn, nhưng kết quả của 100 lần lặp ại của mẫu này minh họa cho những đặc trưng của phân phối chọn mẫu của một trung bình mẫu. Biểu đồ tần suất tương đối của các giá trị trung bình 100 lần tung xúc xắc trong Hình 6.3 tập trung vào trung bình dân số, μ = 3.5. Bạn cũng có thể thấy trong Hình 6.3 rằng khoảng $(\mu \pm 2\sigma_{\bar{x}})$ mà trong đó $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 1.71/\sqrt{5} = 0.76)$ bao gồm hầu hết các giá trị trung bình mẫu. Ngạc nhiên nhất là hình dạng của phân phối xác suất. Thậm chí ngay cả khi chúng ta

---

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

trong đó σ^2 là phương sai của dân số. Khi *N* lớn so với độ lớn mẫu *n*, $\sqrt{(N-n)/(N-1)}$ là xấp xỉ bằng 1. Vì thế

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

chỉ chọn mẫu gồm n = 5 quan sát từ một lượng dân số với một phân phối xác suất hoàn toàn bằng phẳng (Hình 6.2), thì phân phối của các giá trị trung bình mẫu trong Hình 6.3 vẫn có hình dạng gò và tạo cho vẻ bề ngoài xấp xỉ chuẩn tắc.

HÌNH 6.3. **Biểu đồ các giá trị trung bình mẫu cho các thí nghiệm tung xúc xắc trong Phần 6.3**

Hình 6.4 cho chúng ta các kết quả của một số thí nghiệm chọn mẫu Monte Carlo khác. Chúng ta lập trình trên máy tính đền chọn ra các mẫu ngẫu nhiên có độ lớn n = 2, 5, 10 và 25 từ mỗi trong số 3 lượng dân số, lượng dân số thứ nhất sở hữu một phân phối xác suất chuẩn tắc, lượng thứ hai có phân phối xác suất đồng nhất, và lượng thứ ba có phân phối xác suất lũy thừa âm. Những phân phối xác suất dân số này được trình bày trong hàng trên cùng của Hình 6.4. Các bản in từ máy tính về những ước lượng xấp xỉ của các phân phối chọn mẫu của những giá trị trung bình mẫu $\bar{x}$ cho các độ lớn mẫu n = 2, 5, 10, và 25 được thể hiện trong các hàng 2, 3, 4 và 5 của Hình 6.4.

BẢNG 6.3. **Chọn mẫu từ lượng dân số của các lần tung xúc xắc**

HÌNH 6.4. **Các phân phối xác suất và ước lượng xấp xỉ của những phân phối chọn mẫu cho ba lượng dân số [Lưu ý: các tỷ lệ theo chiều dọc không phải là hằng số.]**

Hình 6.4 minh họa một định lý quan trọng của thống kê học lý thuyết. **Sự phân phối chọn mẫu của các giá trị trung bình mẫu chính xác là được phân phối chuẩn tắc (bỏ qua bằng chứng), bất luận độ lớn mẫu thế nào, khi chúng ta đang chọn mẫu từ một lượng dân số mà sở hữu một phân phối chuẩn tắc.** Trái lại, phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ cho các mẫu được chọn từ những lượng dân số có các phân phối xác suất đồng nhất và lũy thừa âm có xu hướng ngày càng trở nên gần như chuẩn tắc khi độ lớn mẫu n tăng từ $n = 2$ đến $n = 25$, rất nhanh đối với phân phối đồng nhất và chậm hơn cho phân phối lũy thừa bị nghiêng lệch nhiều. Nhưng lưu ý rằng phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ là chuẩn tắc hay xấp xỉ chuẩn tắc khi độ lớn mẫu là lớn bằng n = 25. Kết quả này gợi ý rằng đối với nhiều lượng dân số thì phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ sẽ xấp xỉ chuẩn tắc đối với các độ lớn mẫu vừa phải. Có những ngoại lệ đối với qui luật này. Do đó, chúng ta sẽ gán độ lớn mẫu phù hợp n cho các ứng dụng cụ thể về Định lý Giới hạn Trung tâm khi các gặp phải các ứng dụng đó trong cuốn sách này.

Các đặc trưng của phân phối chọn mậu của giá trị trung bình mẫu được trình bày trong phần sau.

Phân phối chọn Mẫu của Giá trị Trung bình Mẫu $\bar{x}$

1. Nếu một mẫu ngẫu nnhiên gồm n thước đo được chọn từ một dân số có trung bình μ và độ lệch chuẩn σ, thì phân phối chọn mẫu của giá trị trung bình mẫu $\bar{x}$

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

và một độ lệch chuẩn

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. Nếu dân số đó sở hữu một phân phối *chuẩn tắc*, thì phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ sẽ *chính xác* được phân phối chuẩn tắc, *bất luận độ lớn mẫu n thế nào.*

3. Nếu phân phối dân số là không chuẩn tắc, thì phân phối mẫu của $\bar{x}$ sẽ là, đối với các mẫu lớn, xấp xỉ được phân phối chuẩn tắc (theo Định lý Giới hạn Trung tâm). Hình 6.4 gợi ý rằng các phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ sẽ xấp xỉ chẩun tắc đối với các độ lớn mẫu nhỏ bằng n = 25 cho phần lớn các lượng dân số về thước đo.

VÍ DỤ 6.1 Giả định rằng bạn chọn một mẫu ngẫu nhiên gồm n = 25 quan sát từ một lượng dân số có trung bình μ = 8 và độ lệch chuẩn σ = 0.6.

a. Tìm xác suất xấp xỉ để cho trung bình mẫu $\bar{x}$ sẽ thấp hơn 7.9.

b. Tìm xác suất xấp xỉ để cho trung bình mẫu $\bar{x}$ sẽ cao hơn 7.9.

c. Tìm xác suất xấp xỉ để cho trung bình mẫu $\bar{x}$ sẽ nằm trong khoảng 0.1 của trung bình dân số μ = 8.

Lời giải

a. Không quan tâm đến hình dạng của phân phối tần suất tương đối của dân số, thì phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ sẽ sở hữu một trung bình $\mu_{\bar{x}} = \mu = 8$ và một độ lệch chuẩn

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.6}{\sqrt{25}} = 0.12$$

Đối với mẫu có độ lớn như n = 25, thì nhiều khả năng (do Định lý Giới hạn Trung tâm) là phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ xấp xỉ được phân phối chuẩn tắc (chúng ta sẽ giả định như vậy). Vì thế, xác suất để cho $\bar{x}$ sẽ thấp hơn 7.9 được ước lượng xấp xỉ bằng với vùng tô đen bên dưới phân phối mẫu chuẩn tắc trong Hình 6.5. Để tìm ra vùng này, chúng ta cần tính toán giá trị của z tương ứng với $\bar{x}$ = 7.9. Giá trị này của z là khoảng cách giữa $\bar{x}$ = 7.9 và $\mu_{\bar{x}} = \mu = 8$ được thể hiện trong độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu - nghĩa là, tính theo đơn vị của

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.6}{\sqrt{25}} = 0.12$$

Như vậy

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{7.9 - 8.0}{0.12} = -0.83$$

Từ Bảng 3 trong Phụ lục II, chúng ta tìm thấy vùng tương ứng với z = 0.83 là 0.2967. Vì thế,

$$P(\bar{x} < 7.9) = 0.5 - 0.2967 = 0.2033$$

[Lưu ý rằng chúng ta phải sử dụng $\sigma_{\bar{x}}$ (không phải σ) trong công thức này của z bởi vì chúng ta đang tìm một vùng nằm bên dưới phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$, chứ không phải nằm dưới phân phối chọn mẫu của x.]

HÌNH 6.5. **Xác suất để cho $\bar{x}$ nhỏ hơn 7.9 cho Ví dụ 6.1**

HÌNH 6.6. **Xác suất để cho $\bar{x}$ lớn hơn 7.9 cho Ví dụ 6.1**

b. Sự kiện rằng $\bar{x}$ vượt quá 7.9 là một phần bù cho sự kiện rằng $\bar{x}$ nhỏ hơn 7.9. Như vậy, xác suất để cho $\bar{x}$ lớn hơn 7.9 là

$$P(\bar{x} > 7.9) = 1 - P(\bar{x} < 7.9) = 1 - 0.2033 = 0.7967$$

c. Xác suất để cho $\bar{x}$ nằm trong 0.1 của μ = 8 là vùng tô đen trong Hình 6.6. Chúng ta đã tìm ra trong phần (a) rằng vùng nằm giữa $\bar{x}$ =7.9 và μ = 8.0 là 0.2967. Bởi vì vùng nằm dưới đường cong chuẩn tắc giữa $\bar{x}$ = 8.1 và μ = 8.0 là bằng với vùng nằm giữa $\bar{x}$ =7.9 và μ = 8.0, cho nên:

$$P(7.9 < \bar{x} < 8.1) = 2(0.2967) = 0.5934$$

VÍ DỤ 6.2. Để tránh được những khó khăn với Hội đồng Thương mại Liên bang hay những tổ chức bảo vệ người tiêu dùng cấp địa phương hay tiểu bang, một người đóng chai phải đảm bảo hợp lý rằng các chai 12 aoxơ thật sự chứa được 12 aoxơ bia. Để quyết định rằng liệu một máy đóng chai có vận hành một cách đáng hài lòng hay không, một công nhân đóng chai chọn mẫu ngẫu nhiên mười chai mỗi tiếng và đo lường lượng bia trong mỗi chai. Trung bình $\bar{x}$ của mười lần đo lượng bia trong chai được sử dụng để quyết định liệu có phải điều chỉnh lại lượng bia đưa vào mỗi chai bởi máy bơm hay không. Nếu kết quả ghi nhận cho thấy rằng lượng bơm vào tính trên mỗi chai được phân phối chuẩn tắc với một độ lệch chuẩn là 0.2 aoxơ, và nếu máy đóng chai này được thiết lập để tạo ra một lần bơm trung bình mỗi chai là 12.1 aoxơ, thì xác suất xấp xỉ để cho trung bình mẫu $\bar{x}$ của 10 chai bia được kiểm tra thấp hơn 12 aoxơ là bao nhiêu?

Lời giải Trung bình của phân phối chọn mẫu của trung bình mẫu $\bar{x}$ là bằng với trung bình của dân số các lần bơm bia vào chai - cụ thể là, μ = 12.1 aoxơ - và độ lệch chuẩn (hay sai số chuẩn) của $\bar{x}$ là

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.2}{\sqrt{10}} = 0.063$$

[*Lưu ý*: σ là độ lệch chuẩn của lượng dân số của những lần bơm bia vào chai, và n là số lượng chai trong mẫu này.] Bởi vì lượng bia bơm vào có phân phối chuẩn tắc, cho nên $\bar{x}$ cũng được phân phối chuẩn tắc. Cho nên phân phối xác suất của $\bar{x}$ sẽ xuất hiện như được thể hiện trong Hình 6.7.

HÌNH 6.7. **Phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$, trung bình của *n = 10* lần bơm bia vào chai, cho Ví dụ 6.2**

Xác suất để cho $\bar{x}$ sẽ thấp hơn 12 aoxơ bằng với (0.5 - *A*), trong đó *A* là vùng nằm giữa 12 và trung bình μ = 12.1. Biểu diễn khoảng cách này trong các độ lệch chuẩn, chúng ta có:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{12 - 12.1}{0.063} = -1.59$$

Sau đó vùng *A* qua khoảng $12 < \bar{x} < 12.1$, được tìm thấy trong Bảng 3 của Phụ lục II, là 0.441. và xác suất để cho $\bar{x}$ thấp hơn 12 aoxơ là:

$$P(\bar{x} < 12) = 0.5 - A = 0.5 - 0.4441 = 0.0559 \approx 0.056$$

Vì thế, nếu như cái máy này được thiết lập để bơm một lượng bình quân 12.1 aoxơ, thì lượng bơm trung bình $\bar{x}$ của một mẫu gồm mười chai sẽ thấp hơn 12 aoxơ với xác suất bằng với 0.056. Khi dấu hiện nguy hiểm này xảy ra ($\bar{x}$ thấp hơn 12), thì người công nhân đóng chai đó phải lấy một mẫu lớn hơn để kiểm tra lại việc thiết lập máy bơm này.

Các mẹo giải toán

Trước khi cố gắng tính toán xác suất để cho con số thống kê $\bar{x}$ trong một khoảng nào đó, hãy hoàn tất các bước sau đây:

1. Tính toán trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$.
2. Vẽ phác họa đồ thị phân phối chọn mẫu. Cho thấy vị trí của trung bình μ, và xác định vị trí cho các khoảng $\mu \pm 2\sigma_{\bar{x}}$ và $\mu \pm 3\sigma_{\bar{x}}$ trên trục hoành.
3. Xác định vị trí cho khoảng trên đồ thị phác thảo từ phần 2 và tô đen vùng tương ứng với xác suất mà bạn mong muốn tính toán.

4. Tìm (các) điểm số *z* đi cùng với (các) giá trị của vấn đề quan tâm. Sử dụng Bảng 3 trong Phụ lục II để tìm ra xác suất.
5. Khi bạn đã có được câu trả lời, hãy nhìn vào đồ thị phác thảo về phân phối chọn mẫu để xem liệu câu trả lời tính toán được của bản có nhất quán với vùng được tô đen hay không. Điều này cung cấp một sự kiểm tra rất sơ bộ cho các tính toán của bạn.

BÀI TẬP

Các kỹ thuật cơ bản

6.1 Các mẫu ngẫu nhiên có độ lớn *n* được chọn từ những dân số với trung bình và phương sai như sau. Tìm trung bình và độ lệch chuẩn (sai số chuẩn) cho phân phối chọn mẫu của trung bình mẫu sau.

a $n = 25, \mu = 10, \sigma^2 = 9$

b $n = 100, \mu = 5, \sigma^2 = 4$

c $n = 6, \mu = 120, \sigma^2 = 1$

6.2 Quay lại Bài tập 6.1.

a Nếu các lượng dân số được chọn mẫu là chuẩn tắc, thì phân phối chọn mẫu của $\overline{x}$ cho các phần (a), (b), và (c) là bao nhiêu?

b Theo Định lý Giới hạn Trung tâm, nếu các lượng dân số được chọn mẫu *không* phải chuẩn tắc, thì chúng ta có thể nói điều gì về phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ cho các phần (a), (b), và (c).?

6.3 Quay lại phân phối chọn mẫu được mô tả trong Bài tập 6.1 (b).

a Vẽ phác thảo phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$. Xác định vị trí của trung bình và khoảng $(\mu \pm 2\sigma_{\bar{x}})$ theo trục $\bar{x}$ của đồ thị này.

b Tô đen vùng nằm bên dưới đường cong mà tương ứng với xác suất để cho $\bar{x}$ nằm trong giới hạn 0.15 đơn vị của trung bình dân số μ.

c Tìm xác suất được mô tả trong phần (a).

6.4 Quay lại thí nghiệm tung xúc xắc trong Phần 6.3 mà trong đó *x* là con số các chấm quan sát được khi một con xúc xắc duy nhất được tung. Phân phối xác suất của *x* được thể hiện trong Hình 6.2, và biểu đồ tần suất tương đối cho $\bar{x}$ được trình bày trong Hình 6.3 cho 100 mẫu ngẫu nhiên có độ lớn $n = 5$.

a Kiểm tra rằng trung bình và độ lệch chuẩn của *x* lần lượt là $\mu = 3.5$ và $\sigma = 1.71$.

b Nhìn vào biểu đồ trong Hình 6.3. Đoán giá trị của trung bình và độ lệch chuẩn của nó. [*Gợi ý:* Qui tắcThực chứng phát biểu rằng xấp xỉ 95% các thước đo đi cùng với một phân phối có hình dạng gò sẽ nằm trong giới hạn hai lần độ lệch chuẩn của trung bình.]

c Trung bình và độ lệch chuẩn theo lý thuyết của phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ là bao nhiêu? Những giá trị này so sánh với các giá trị được ước đoán trong phần (b) ra sao?

6.5 Quay lại Bài tập 6.4. Giả định một thí nghiệm tung xúc xắc được lặp đi lặp lại rất nhiều lần. Hãy tìm trung bình và độ lệch chuẩn (sai số chuẩn) cho phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ nếu mỗi mẫu có các giá trị sau đây.

a n = 10 thước đo

b n = 15 thước đo

c n = 25 thước đo

6.6 Quay lại Bài tập 6.4 và 6.5. Việc gia tăng độ lớn mẫu sẽ có ảnh hưởng như thế nào đến phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$?

6.7 Các Bài tậ[6.5 và 6.6 đã chứng tỏ rằng độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu giảm đi khi độ lớn mẫu tăng lên. Để xem xét mối quan hệ này kỹ lưỡng hơn, giả định rằng một mẫu ngẫu nhiên gồm *n* quan sát được chọn từ một dân số với độ lệch chuẩn $\sigma = 1$. Hãy tính toán $\sigma_{\bar{x}}$ cho $n = 1, 2, 4, 9, 16, 25$ và 100. Sau đó vẽ đồ thị $\sigma_{\bar{x}}$ so với độ lớn mẫu *n*, và nối các điểm với một đường cong bằng phẳng. Lưu ý cách thức mà qua đó $\sigma_{\bar{x}}$ giảm đi khi *n* gia tăng.

6.8 Giả định rằng một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 5$ quan sát được chọn từ một dân số mà được phân phối chuẩn tắc với trung bình bằng với 1 và độ lệch chuẩn là 0.36.

a Tính trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$.

b Tìm xác suất để cho $\bar{x}$ lớn hơn 1.3.

c Tìm xác suất để cho mẫu $\bar{x}$ sẽ nhỏ hơn 0.5.

d Tìm xác suất để cho trung bình mẫu sẽ sai lệch với trung bình dân số $\mu = 1$ không nhiều hơn 0.4.

6.9 Giả định rằng một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 25$ quan sát được chọn từ một lượng dân số mà có phân phối chuẩn tắc với trung bình bằng với 106 và độ lệch chuẩn là 12.

a Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu của trung bình mẫu $\bar{x}$.

b Tìm xác suất để cho $\bar{x}$ lớn hơn 110.

c Tìm xác suất để cho trung bình mẫu sẽ sai lệch so với trung bình dân số $\mu = 106$ không nhiều hơn 4.

Các ứng dụng

6.10 Giải thích tại sao trọng lượng chuyên chở của một xe tải chở đầy cam có thể được phân phối chuẩn tắc.

6.11 Sử dụng Định lý Giới hạn Trung tâm để giải thích lý do tại sao một biến số ngẫu nhiên Poisson, ví dụ, số lượng tai nạn nhân viên mỗi năm trong một nhà máy chế tạo lớn, sở hữu một phân phối mà xấp xỉ chuẩn tắc khi trung bình μ là lớn. [*Gợi ý:* Một năm là tổng của 365 ngày.]

6.12 Lượng đánh bắt hàng ngày của một ngư dân chuyên đánh bắt tôm hùm *x* là tổng số, tính bằng pao, của số tôm hùm đem vào bờ từ một con số cố định các bẫy tôm hùm. Dạng phân phối xác suất nào mà bạn kỳ vọng rằng lượng đánh bắt hàng ngày sẽ sở hữu và lý do tại sao? Nếu lượng đánh bắt trung bình mỗi bẫy mỗi ngày là 30 pao với $\sigma = 5$ pao, và người ngư dân đó có 50 cái bẫy, hãy cho biết trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối xác suất của tổng lượng đánh bắt hàng ngày *x*.

6.13 Một kỳ vọng quan trọng về sự giảm thuế thu nhập liên bang gần đây là rằng người tiêu dùng sẽ tiết kiệm một phần đáng kể khoản tiền mà họ nhận được. Giả định rằng các con số ước tính về tỷ lệ trong tổng tiền thuế tiết kiệm được, dựa trên việc chọn mẫu ngẫu nhiên 35 kinh tế gia, sở hữu một trung bình là 26% và độ lệch chuẩn là 12%.

a Xác suất xấp xỉ để cho một trung bình mẫu, dựa trên một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 35$ kinh tế gia, sẽ nằm trong giới hạn 1% trung bình của lượng dân số các ước tính của tất cả các nhà kinh tế là bao nhiêu?

b Liệu có nhất thiết đúng khi cho rằng trung bình của lượng dân số các ước tính của tất cả kinh tế gia này là bằng với tỷ lệ phần trăm tiết kiệm thuế mà đạt được trên thực tế không?

6.14 Điểm số của bài Kiểm tra Khả năng Ngẫu nhiên (SAT) vào năm 1993-1994 cung cấp cho ta các kết quả lẫn lộn khi so sánh với cùng điểm số này vào năm 1989. Bài kiểm tra toán học này, được thực hiện bởi xấp xỉ một phần ba số học sinh trung học trên toàn quốc, đã cho thấy một sự gia tăng trong điểm số trung bình từ 476 lên 478, trong khi điểm số của bài kiểm tra bằng miệng lại giảm từ 427 xuống còn 424. ("Using Your College Planning Report (*Sử dụng Báo cáo Hoạch định Đại học*): 1993-94"). Tại sao những sự thay đổi rất nhỏ này phải được các nhà giáo dục xem là quan trọng trong việc đo lường thành tựu của sinh viên?

6.15 Để có được thông tin về khối lượng hàng hóa vận chuyển được chuyên chở bằng xe tải trên một tuyến xa lộ liên bang cụ thể, một ủy ban xa lộ tiểu bang đã kiểm tra xa lộ này trong 25 kỳ 1 tiếng được chọn ngẫu nhiên trong suốt một tháng. Số lượng xe tải moóc đi qua được đếm theo từng kỳ 1 tiếng, và $\bar{x}$ được tính toán cho một mẫy gồm 25 kỳ 1 tiếng riêng lẻ. Giả định rằng con số các xe tải moóc hạng nặng mỗi giờ xấp xỉ có phân phối chuẩn tắc, với $\mu = 50$ và $\sigma = 7$.

a Xác suất để cho trung bình mẫu $\bar{x}$ cho $n = 25$ kỳ 1 giờ riêng lẻ lớn hơn 55 là bao nhiêu?

b Giả định rằng bạn phải đếm số xe tải moóc đi qua cho mỗi $n = 4$ kỳ 1 tiếng được chọn ngẫu nhiên. Xác suất để cho $\bar{x}$ lớn hơn 55 là bao nhiêu? [*Gợi ý:* Phân phối của các trung bình mẫu này sẽ được phân phối chuẩn tắc, bất kể qui mô mẫu thế nào, cho trường hợp đặc biệt khi lượng dân số này sở hữu một phân phối chuẩn tắc.]

c Xác suất để cho tổng số xe tả trong một kỳ 4 tiếng vượt quá 180 là bao nhiêu?

6.16 Một nhà sản xuất giấy được sử dụng cho việc đóng gói yêu cầu một sức bền tối thiểu là 20 pao tính trên mỗi inch vuông. Như là một sự kiểm tra về chất lượng của loại giấy này, một mẫu ngẫu nhiên gồm 10 miếng giấy được chọn mỗi giờ từ sản phẩm của giờ trước đó, và một thước đo sức bền được ghi nhận cho mỗi miếng. Độ lệch chuẩn σ của các thước đo sức bền, được tính bằng cách cộng tổng các bình phương của các độ lệch của nhiều mẫu, được biết là bằng với 2 pao mỗi inch vuông. Giả định rằng các thước đo sức bền này được phân phối chuẩn tắc.

a Phân phối xác suất xấp xỉ của sức bền trung bình mẫu của $n = 10$ miếng giấy được kiểm tra là bao nhiêu?

b Nếu trung bình của lượng dânh số các mẫu sức bền là 21 pao mỗi inch vuông, thì xác suất để cho $\bar{x} < 20$ cho một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 10$ miếng giấy kiểm tra là bao nhiêu?

c Giá trị mà bạn muốn có cho sức bền trung bình của giấy μ để cho $P(\bar{x} < 20)$ là bằng với 0.001 là bao nhiêu?

6.17 Thời gian thực hiện là một biến số rất quan trọng trong việc bán hàng và quảng cáo các máy tính cá nhân (PC). Tuy nhiên, những thời gian thực hiện này khó có thể lượng hóa được, ngay cả đối với một mẫu máy cụ thể, bởi vì thời gian này phụ thuộc vào số lượng và loại hình phần mềm được tải lên PC đó, dung lượng đĩa cứng còn trống sẵn có, và vân vân. Giả địnhr ằng chúng ta mong muốn đo lường lượng thời gian (tính bằng giây) cần thiết để tải chương trình Ami Pro 2.0 trên máy PC hiệu IBM PS/2 Model 90 484DX/33 với hệ điều hành Standard Windows ("Byte Windows,", 1993).

a Giải thích tại sao thời gian cần thiết để tải chương trình Ami Pro 2.0 phải được phân phối xấp xỉ chuẩn tắc?

b Nếu thời gian để tải Ami Pro 2.0 có trung bình là 1.33 giây với độ lệch chuẩn là 0.2 giây, thì xác suất để cho cần nhiều hơn 1.4 giây để tải chương trình này trên một máy PC được chọn ngẫu nhiên là bao nhiêu?

c Nếu năm PC được chọn ngẫu nhiên, thì xác suất để cho thời gian trung bình để tải cho năm máy này vượt quá 1.4 giây là bao nhiêu?

6.4 PHÂN PHỐI CHỌN MẪU CỦA MỘT TỶ LỆ MẪU

Nhiều vấn đề chọn mẫu liên quan đến sở thích của người tiêu dùng hay các cuộc trưng cầu ý kiến, mà có liên quan đến việc ước lượng tỷ lệ *p* dân chúng trong dân số mà sở hữu một số đặc trưng cụ thể nào đó. Những tình huống này và các trường hợp tương tự cho chúng ta những ví dụ thực tiễn về các thí nghiệm kép. Nếu một mẫu ngẫu nhiên gồm *n* người được chọn từ một lượng dân số và nếu *x* của những người này sở hữu một đặc trưng cụ thể, thì tỷ lệ mẫu

$$\hat{p} = x/n$$

được sử dụng để ước tính tỷ lệ dân số *p*.[+]

Bởi vì mỗi giá trị riêng biệt của *x* tạo ra một giá trị riêng biệt của $\hat{p} = x/n$, nên các xác suất đi cùng với $\hat{p}$ là bằng với các xác suất kết hợp với những giá trị tương ứng của *x*. Như vậy, phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ sẽ có cùng hình dạng như trong phân phối xác suất kép của *x*. Giống như phân phối xác suất kép, phân phối này có thể được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn tắc khi độ lớn mẫu *n* là lớn. Trung bình của phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ là:

$$\mu_{\hat{p}} = p$$

và độ lệch chuẩn của nó là

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

trong đó

$$q = 1 - p$$

Các đặc trưng của Phân phối chọn Mẫu của Tỷ lệ Mẫu $\hat{p}$

1. Nếu một mẫu ngẫu nhiên gồm *n* quan sát được chọn từ một dân số kép có tham số *p*, thì phân phối chọn mẫu của tỷ lệ mẫu này là

$$\hat{p} = x/n$$

sẽ có một trung bình

$$\mu_{\hat{p}} = p$$

và một độ lệch chuẩn

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \text{trong đó } q = 1 - p$$

2. Khi độ lớn mẫu *n* là lớn, thì phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ sẽ là xấp xỉ chuẩn tắc. Sự ước lượng xấp xỉ này sẽ phù hợp nếu như $\mu_{\hat{p}} \pm 2\sigma_{\hat{p}}$ nằm trong giới hạn khoảng từ 0 đến 1, và ước lượng xấp xỉ này sẽ là tốt nếu như $\mu_{\hat{p}} \pm 3\sigma_{\hat{p}}$ nằm trong giới hạn khoảng từ 0 đến 1.

[+] Một "dấu mũ" được đặt trên ký hiệu của một tham số dân số biểu thị cho một con số thống kê được sử dụng để ước tính tham số dân số đó. Ví dụ, ký hiệu $\hat{p}$ biểu thị cho tỷ lệ mẫu.

VÍ DỤ 6.3. Một cuộc điều tra được thực hiện với 313 người con, trong độ tuổi từ 14 đến 22, từ trong số con cái của các giám đốc điều hành công ty hàng đầu của nước ngoài. Khi được hỏi hãy nhận dạng khía cạnh tốt nhất của việc được là một thành viên trong cái nhóm đặc quyền này, 55% đề cập đến những lợi thế về vật chất và tài chính. Hãy mô tả phân phối chọn mẫu của tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ của những người con liệt kê lợi thế vật chất như là khía cạnh tốt nhất của cuộc sống đặc quyền này.

Lời giải Chúng ta sẽ giả định rằng 313 người con này tượng trưng cho một mẫu ngẫu nhiên những người con của tất cả giám đốc điều hành doanh nghiệp hàng đầu và rằng tỷ lệ thực sự trong lượng dân số này là bằng với một giá trị chưa biết mà chúng ta sẽ gọi là *p*. Sau đó phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ sẽ được phân phối xấp xỉ chuẩn tắc (do Định lý Giới hạn Trung tâm) với trung bình bằng với *p* (xem Hình 6.8) và một độ lệch chuẩn

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

HÌNH 6.8. **Phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ dựa trên một mẫu gồm *n* = 313 người con cho Ví dụ 6.3**

Khảo sát Hình 6.8, bạn có thể thấy rằng phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ tập trung vào trung bình *p* của nó. Thậm chí ngay cả khi chúng ta không biết giá trị chính xác của *p* (tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ =0.55 có thể lớn hơn hay nhỏ hơn *p*), chúng ta vẫn có thể tính được giá trị xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu bằng cách sử dụng tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ =0.55 để ước lượng xấp xỉ giá trị chưa biết của *p*. Vì vậy

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \approx \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{313}} = 0.0283$$

Hơn nữa, bởi vì sự ước lượng xấp xỉ này cho khoảng $p \pm 3\sigma_{\hat{p}}$, được cho bởi

$$\begin{aligned} &\hat{p} \pm 3\sigma_{\hat{p}} \\ &0.55 \pm 3(0.028) \\ &0.55 \pm 0.084 \end{aligned}$$

hay (0.466, 0.634) nằm trong giới hạn của khoảng từ 0 đến 1, cho nên ước lượng xấp xỉ chuẩn tắc cho phân phố của $\hat{p}$ phải tốt.

VÍ DỤ 6.4. Quay lại Ví dụ 6.3. Giả định rằng tỷ lệ *p* những người con trong dân số này trên thực tế bằng với 0.5. Xác suất của việc quan sát một tỷ lệ mẫu lớn bằng hay lớn hơn giá trị quan sát được $\hat{p} = 0.55$ là bao nhiêu?

Lời giải Hình 6.9 cho thấy phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ khi $p = 0.5$. với giá trị quan sát được $\hat{p} = 0.55$ được xác định đặt trên trục hoành. Từ Hình 6.9, bạn có thể thấy rằng xác suất của việc quan sát một tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ bằng hay lớn hơn 0.55 là vùng tô đen ở phần đuôi sau của một phân phối chuẩn tắc, với

$$\mu_{\hat{p}} = 0.5$$

và

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{313}} = 0.0283$$

Để tìm ra vùng tô đen này, chúng ta cần biết có bao nhiêu độ lệch chuẩn mà giá trị quan sát được $\hat{p} = 0.55$ nằm xa khỏi trung bình của phân phối chọn mẫu $p = 0.5$. Khoảng cách này được cho bởi giá trị z,

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{0.55 - 0.5}{0.0283} = 1.77$$

Bảng 3 trong Phụ lục II cho ta vùng A tương ứng với $z = 1.77$ như sau

$$A = 0.4616$$

Như thế, vùng tô đen trong phần đuôi sau của phân phối chọn mẫu trong Hình 6.9 là

$$P(\hat{p} \geq 0.55) = 0.5 - A = 0.5 - 0,4616 = 0,0384 \approx 0.04$$

Giá trị này cho chúng ta biết rằng nếu chúng ta phải chọn lựa một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 313$ quan sát từ một dân số có tỷ lệ p bằng với 0.5, thì xác suất để cho tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ lớn bằng hay lớn hơn 0.55 chỉ là 0.04.

HÌNH 6.9. **Phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ cho n = 313 và p = 0.05 trong Ví dụ 6.4**

BÀI TẬP

Các kỹ thuật cơ bản

6.18 Một mẫu ngẫu nhiên có độ lớn n được chọn từ các lượng dân số kép với các tham số dân số p. Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu của tỷ lệ mẫu $\hat{p}$.

- **a** $n = 100$, $p = 0.3$
- **b** $n = 400$, $p = 0.1$
- **c** $n = 250$, $p = 0.3$

6.19 Vẽ đồ thị mỗi trong số các phân phối chọn mẫu được liệt kê trong Bài tập 6.18. Đối vối mỗi phân phối, xác định vị trí trung bình p và khoảng $(p \pm 2\sigma_{\hat{p}})$ dọc theo trục $\hat{p}$ của đồ thị.

6.20 Quay lại phân phối chọn mẫu được cho trong Bài tập 6.18 (a).

- **a** Vẽ đồ thị phân phối chọn mẫu cho tỷ lệ mẫu, và tô đen vùng nằm dưới đường cong mà tương ứng với xác suất để cho $\hat{p}$ nằm trong giới hạn 0.08 của tỷ lệ dân số p.
- **b** Tìm xác suất được mô tả trong phần (a).

6.21 Nếu $n = 1000$ và $p = 0.1$, hãy tìm các xác suất sau đây

- **a** $\hat{p} > 0.12$
- **b** $\hat{p} < 0.10$
- **c** $\hat{p}$ nằm giữa 0.02 của p

6.22 Tính $\sigma_{\hat{p}}$ cho $n = 100$ và các giá trị sau đây của p

a $p = 0.01$ **b** $p = 0.1$ **c** $p = 0.3$ **d** $p = 0.5$

e $p = 0.7$ **f** $p = 0,9$ **g** $p = 0.99$

Vẽ đồ thị phác thảo $\sigma_{\hat{p}}$ so với *p* trên giấy dùng để vẽ đồ thị, và kẻ một đường cong uyển chuyển nối các điểm. Với giá trị nào của *p* thì độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$ là tối đa? Điều gì xảy ra cho $\sigma_{\hat{p}}$ khi *p* gần với 0 hay gần với 1?

6.23 Giả định rằng *p* có một giá trị cố định nào đó, thì tác động lên $\sigma_{\hat{p}}$ của việc tăng độ lớn mẫu là như thế nào? Liệu một sự thay đổi trong độ lớn mẫu *n* có cùng ảnh hưởng đối với $\sigma_{\hat{p}}$ như đối với $\sigma_{\bar{x}}$ không? Giải thích.

6.24 Nếu $p = 0.8$ và $n = 400$, hãy tìm các phân phối sau

a $\hat{p} > 0.83$

b $0.76 \le \hat{p} \le 0.84$

Các ứng dụng

6.25 Những người đi mua sắm là đàn ông mà sống trong các hộ gia đình có thu nhập cao hay sở hữu máy vi tính cá nhân (PC) có các ý kiến khác nhau về chủ đề mua sắm qua máy tính so với mua sắm tại cửa hàng (Dholakia, 1994). Trong một nghiên cứu gần đây về 1600 người mua sắm là đàn ông "thượng lưu" tại Hoa Kỳ.

a Mô tả phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$, tỷ lệ đàn ông trong mẫu mà tìm thấy việc mua sắm qua máy tính là tiện lợi. [*Gợi ý:* Sử dụng $\hat{p}$ để ước lượng xấp xỉ *p* khi tính toán $\sigma_{\hat{p}}$]

b Tìm xác suất để cho $\hat{p}$ sẽ nằm trong giới hạn 0.03 của tỷ lệ *p* của đàn ông "thượng lưu" trong dân số mà thấy rằng việc mua sắm qua máy tính là tiện lợi.

6.26 Trong quí đầu tiên của năm 1994, trung vị giá nhà trên toàn quốc là 112.000 USD ("Midwest, South (*Miền Trung Tây, Miền Nam),*" 1994). Giả sử rằng 250 mà mua một căn nhà trong quí một năm 1994 được chọn ngẫu nhiên và chi phí cho nhà cửa của họ được ghi nhận.

a Mô tả phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$, tỷ lệ của dân chúng mà chi phí nhà ở của họ nhiều hơn 112.000 USD.

b Xác suất để cho tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ là 66% hay lớn hơn là bao nhiêu?

c Nếu bạn phải chọn mẫu và bạn quan sát 165 người (66% của mẫu này) mà chi phí nhà ở của họ nhiều hơn 112.000 USD, thì bạn có thể rút ra những kết luận nào? Tại sao?

6.27 Các nhà quảng cáo phải quan tâm đến các vai trò đang thay giữa đàn ông và phụ nữ trong xã hội nhằm xác định mục tiêu một cách đúng đắn cho các quảng cáo của mình hướng đến khu vực phù hợp của thị trường. Ví dụ, phụ nữ đóng một vai trò ngày càng gia tăng trong các quyết định mua sắm xe hơi, và đàn ông ngày càng tham gia nhiều hơn so với trong quá khứ trong việc mua sắm và chuẩn bị thức ăn. Một nghiên cứu gần đây cho thấy rằng 80% tất cả những người đã lập gia đình cảm thấy rằng họ có một tiếng nói ngang bằng trong việc thực hiện những lần mua sắm lớn cho gia đình (Dortch, 1994). Giả định rằng một mẫu ngẫu nhiên gồm $n = 300$ người đã kết hôn được chọn và hỏi rằng nếu họ cảm thấy rằng mình có một tiếng nói ngang bằng trong việc thực hiện các lần mua sắm quan trọng trong gia đình.

a Xác suất để cho có nhiều hơn 85% mẫu cảm thấy rằng họ có một tiếng nói ngang bằng trong các lần mua sắm quan trọng của gia đình là bao nhiêu?

b Bạn sẽ kỳ vọng rằng 95% của các tỷ lệ mẫu sẽ rơi vào trong những giới hạn nào?

c Xác suất để cho tỷ lệ mẫu khác với tỷ lệ dân số *p* không nhiều hơn 5% về bất cứ hướng nào là bao nhiêu?

6.5. MỘT ỨNG DỤNG CHỌN MẪU: KIỂM SOÁT QUI TRÌNH THỐNG KÊ

Phương pháp kiểm soát qui trình thống kê (SPC) được phát triển nhằm giám sát, kiểm soát, và cải thiện các sản phẩm và dịch vụ. Các trụ thép phải phù hợp với những chi tiết kỹ thuật về kích thước và độ cứng, các hóa chất công nghiệp phải có một mức độ tạp chất thấp được xác định trước, và các hãng kế toán phải tối thiểu hóa và cuối cùng loại bỏ những nhập sổ sách kế toán không chính xác. Người ta thường nói rằng sự kiểm soát qui trình thống kê bao gồm 10% thống kê học và 90% là công việc và thói quen. Chúng ta có thể giám sát về mặt thống kê một con số trung bình của qui trình và nói rằng khi nào thì trung bình rơi ra khỏi các giới hạn được chỉ định trước, nhưng chúng ta không thể nói *tại sao* giá trị trung bình này lại không kiểm soát được. Trả lời câu hỏi cuối cùng này đòi hỏi một kiến thức về qui trình này và khả năng giải toán - 90% còn lại.

Chất lượng sản phẩm thường được giám sát bằng cách sử dụng các biểu đồ kiểm soát thống kê. Các thước đo đối với một biến số qui trình được giảm sát thì thay đổi theo thời gian. Nguyên nhân của một sự thay đổi trong biến số này được cho là *có thể chỉ định* nếu như nó có thể được tìm thấy và chỉnh sửa. Sự thay đổi khác - những sự thay đổi bừa bãi nhỏ do có sự thay đổi trong môi trường sản phẩm - mà không thể kiểm soát được xem như là *sự thay đổi ngẫu nhiên*. Nếu sự thay đổi trong một biến số qui trình hoàn toàn là ngẫu nhiên, thì qui trình này được cho là *trong tầm kiểm soát*. Mục tiêu đầu tiên trong sự kiểm soát qui trình thống kê là nhằm loại trừ các nguyên nhân có thể chỉ định về những sự thay đổi trong biến số qui trình và sau đó đưa qui trình này vào tầm kiểm soát. Bước tiếp theo là phải giảm sự thay đổi và đưa các thước đo đối với biến số qui trình này vào trong *những giới hạn kỹ thuật cụ thể*, những giới hạn mà trong phạm vi đó thì các thước đo đối với các mặt hàng hay dịch vụ có thể sử dụng được phải rơi vào.

Một khi một qui trình nằm trong tầm kiểm soát và đang tạo ra một sản phẩm vừa ý, thì các biến số qui trình được giám sát bằng cách sử dụng **các biểu đồ kiểm soát.** Các mẫu gồm *n* vật phẩm được rút ra từ qui trình này ở các quãng thời gian được xác định cụ thể, và một con số thống kê mẫu được tính toán. Những số liệu thống kê này được vẽ phác họa lên biểu đồ kiểm soát để cho qui trình này có thể được kiểm tra cho các ca làm việc trong biến số qui trình mà có thể chi ra các vấn đề kiểm soát.

MỘT BIỂU ĐỒ KIỂM SOÁT CHO TRUNG BÌNH QUI TRÌNH: BIỂU ĐỒ $\bar{x}$

Giả định rằng *n* vật phẩm được chọn từ qui trình sản xuất ở các quãng bằng nhau và rằng các thước đo được ghi nhận đối với biến số qui trình này. Nếu qui trình này nằm trong tầm kiểm soát, thì các số trung bình mẫu phải thay đổi trong trung bình dân số μ theo một cách thức ngẫu nhiên. Hơn nữa, theo Qui luật Thực chứng và Định lý Tchebysheff, chúng ta sẽ kỳ vọng rằng phần lớn các giá trị của $\bar{x}$ sẽ rơi vào khoảng $(\mu \pm 3\sigma_{\bar{x}}) = \mu \pm 3(\sigma/\sqrt{n})$. Mặc dù các giá trị chính xác của μ và σ là chưa được biết, thì chúng ta vẫn có thể có được các ước lượng chính xác bằng cách sử dụng các thước đo mẫu.

Mọi biểu đồ kiểm soát có một *đường trung tâm* và *các giới hạn kiểm soát*. Đường trung tâm là ước lượng của μ, giá trị bình quân chung của tất cả các con số thống kê mẫu được tính toán từ các thước đo đối với biến số qui trình này. Các giới hạn kiểm soát cao hơn và thấp hơn được đặt ở mức ba lần độ lệch chuẩn bên trên và bên dưới đường trung tâm. Nếu chúng ta giám sát giá trị trung bình qui trình này dựa vào *k* mẫu có độ lớn *n* được lấy từ các quãng đều đặn, thì đường trung tâm là $\bar{x}$, bình quân của các giá trị trung bình mẫu, và các giới hạn kiểm soát là ở mức $\bar{x} \pm 3(\sigma/\sqrt{n})$, với σ được ước lượng bởi *s*, độ lệch chuẩn của các thước đo *nk*.

VÍ DỤ 6.5. Một hệ thống giám sát kiểm soát qui trình thống kê chọn mẫu các đường kính bên trong của $n = 4$ ống thép mỗi giờ. Bảng 6.4 cho chúng ta dữ liệu cho $k = 25$ mẫu hàng giờ. Hãy xây dựng biểu đồ $\bar{x}$ cho việc giám sát giá trị trung bình qui trình.

Lời giải Trung bình mẫu được tính toán cho mỗi mẫu k = 25. Ví dụ, trung bình cho mẫu 1 là

$$\bar{x} = \frac{0.992 + 1.007 + 1.016 + 0.991}{4} = 1.0015$$

Các giá trị trung bình mẫu được trình bày trong cột 6 của Bảng 6.4. Đường trung tâm được xác định vị trí ở tại

$$\bar{\bar{x}} = \frac{99.87}{100} = 0.9987$$

Giá trị tính toán được của s, độ lệch chuẩn mẫu của tất cả nk = 4 (25) = 100 quan sát, là s = 0.011458. Sai số ước tính của trung bình của n = 4 quan sát sẽ là

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0.011458}{\sqrt{4}} = 0.005729$$

Các giới hạn kiểm soát cao hơn và thấp hơn được tìm thấy bằng

$$\text{UCL} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{s}{\sqrt{n}} = 0.9987 + 3(0.005729) = 1.015887$$

và

$$\text{LCL} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{s}{\sqrt{n}} = 0.9987 - 3(0.005729) = 0.981513$$

Hình 6.10 cho thấy một bản in Minitab của biểu đồ $\bar{x}$ được xây dựng từ dữ liệu này. Giả định rằng các mẫu được sử dụng để xây dựng biểu đồ $\bar{x}$ được thu thập khi qui trình này ở trong tầm kiểm soát, thì bây giờ biểu đồ này có thể được sử dụng nhằm phát hiện những sự thay đổi trong trung bình qui trình. Các giá trị trung bình mẫu được vẽ đồ thị định kỳ, và nếu một trung bình mẫu rơi ra ngoài các giới hạn kiểm soát thì một sự cảnh báo nên được truyền đạt. Qui trình này nên được kiểm tra để xác định vị trí nguyên nhân của giá trị trung bình thường lớn hay nhỏ.

BẢNG 6.4. **25 mẫu hàng giờ về đường kính các ống thép, n = 4 ống thép mỗi mẫu, cho Ví dụ 6.5**

HÌNH 6.10. **Biểu đồ Minitab $\bar{x}$ cho Ví dụ 6.5**

Các biểu đồ kiểm soát được sử dụng thường xuyên khác là *biểu đồ p*, mà được sử dụng để giám sát p, tỷ lệ sản phẩm có lỗi trong dân số, *biểu đồ R*, mà được sử dụng để giám sát sự thay đổi trong biến số qui trình qua việc sữ dụng khoảng mẫu, và *biểu đồ c*, mà được dùng để giám sát số lượng lỗi trong mỗi mặt hàng. Những biểu đồ kiểm soát chất lượng này sẽ được xem xét chi tiết hơn trong Chương 10.

BÀI TẬP

Các kỹ thuật cơ bản

6.28 Các giá trị trung bình mẫu được tính toán cho 30 mẫu có độ lớn n =10 cho một qui trình mà được đánh giá là nằm trong tầm kiểm soát. Các giá trị trung bình của 30 giá trị $\bar{x}$ và độ lệch chuẩn của 300 thước đo kết hợp là $\bar{\bar{x}} = 20.74$ và x = 0.87.

a Sử dụng dữ liệu này để xác định các giới hạn kiểm soát cao hơn và thấp hơn cho một biểu đồ $\overline{x}$.

b Mục đích của biểu đồ $\overline{x}$ là gì?

c Xây dựng một biểu đồ $\overline{x}$ cho qui trình này và giải thích về cách thức mà biểu đồ này có thể được sử dụng.

6.29 Các giá trị trung bình mẫu được tính toán cho 40 mẫu có độ lớn n = 5 cho một qui trình mà được đánh giá là nằm trong tầm kiểm soát. Các trung bình của 40 giá trị và độ lệch chuẩn của 200 thước đo kết hợp là $\overline{\overline{x}} = 155.9$ và x = 4.3.

a Sử dụng dữ liệu này để xác định các giới hạn kiểm soát cao hơn và thấp hơn cho một biểu đồ $\overline{x}$.

b Xây dựng một biểu đồ $\overline{x}$ cho qui trình này và giải thích về cách thức mà biểu đồ này có thể được sử dụng.

Các ứng dụng

6.30 Một sòng bạc ghi nhận và vẽ đồ thị trung bình của số tiền thắng hay thua cược hàng ngày từ năm bàn blackjack trên một biểu đồ $\overline{x}$. Trung bình chung của các giá trị trung bình mẫu và độ lệch chuẩn của dữ liệu kết hợp qua 40 tuần là $\overline{\overline{x}} = 10{,}752$ USD và x = 1,605 USD.

a Xây dựng một biểu đồ $\overline{x}$ cho trung bình số tiền thắng cược hàng ngày tính trên mỗi bàn blackjack.

b Biểu đồ $\overline{x}$ này có thể có giá trị như thế nào đối với nhà quản lý sòng bạc này?

6.31 Một nhà máy điện đốt than kiểm tra và đo lường ba mẫu than mỗi ngày nhằm giám sát tỷ lệ phần trăm của tro trong than. Trung bình chung của 30 giá trị trung bình mẫu hàng ngày và độ lệch chuẩn kết hợp của tất cả dữ liệu là $\overline{\overline{x}} = 7.24$ và x = 0.07. Hãy xây dựng một biểu đồ $\overline{x}$ cho qui trình này và giải thích rằng biểu đồ này có thể có giá trị ra sao đối với người quản lý nhà máy điện này.

6.32 Dữ liệu cho trong bảng sau là các thước đo sự phóng xạ của các hạt không khí tại một nhà máy điện hạt nhân. Bốn thước đo được ghi nhận theo các quãng hàng tuần trên một thời kỳ 26 tuần. Sử dụng dữ liệu này để xây dựng một biểu đồ $\overline{x}$ và vẽ đồ thị 26 giá trị của $\overline{x}$. Giải thích cách thức mà biểu đồ này có thể được sử dụng.

Tuần	**Sự phóng xạ**				**Tuần**	**Sự phóng xạ**			
1	0.031	0.032	0.030	0.031	14	0.029	0.028	0.029	0.029
2	0.025	0.026	0.025	0.025	15	0.031	0.029	0.030	0.031
3	0.029	0.029	0.031	0.020	16	0.014	0.016	0.016	0.017
4	0.035	0.037	0.034	0.035	17	0.019	0.019	0.021	0.020
5	0.022	0.024	0.022	0.023	18	0.024	0.024	0.024	0.025
6	0.030	0.029	0,030	0.030	19	0.029	0.027	0.028	0.028
7	0.019	0.019	0.018	0.019	20	0.032	0.030	0.031	0.030
8	0.027	0.028	0.028	0.028	21	0.041	0.042	0.038	0.039
9	0.034	0.032	0.033	0.033	22	0.034	0.036	0.036	0.035
10	0.017	0.016	0.018	0.018	23	0.021	0.022	0.024	0.022
11	0.022	0.020	0.020	0.021	24	0.029	0,029	0,030	0.029
12	0.016	0.018	0.017	0.017	25	0.016	0.017	0.017	0.016
13	0.015	0.017	0.018	0.017	26	0.020	0.021	0.020	0.022

6.6. PHÂN PHỐI CHỌN MẪU CỦA NHỮNG LẦN THẮNG CƯỢC TẠI TRÒ RULÉT

Trong nghiên cứu điển hình mà giới thiệu chương này, chúng ta đã mô tả thí nghiệm Monte Carlo được thực hiện bởi Daniel Seligman của tạp chí *Fortune*. Seligman đã mô phỏng 365 đêm đánh bạc tại Monte Carlo. Trong mỗi trong số 365 đêm này, Seligman đặt 200 khoản tiền cược trị giá 5 USD mỗi khoản với tỷ lệ 1 thắng 35 và với một xác xuất thắng cược là 1/38.

Để đánh giá các kết quả của thí nghiệm Monte Carlo của Seligman, chúng ta lưu ý rằng mỗi lần cược tạo ra một khoản thắng cược là - 5 USD nếu ông ta thua và 175 USD nếu ông ta thắng. Như vậy thì phân phối xác suất của khoản thắng cược *x* trong một lần cược 5 USD duy nhất là:

x	*p* (*x*)
-5	37/38
175	1/38

Sau đó từ Chương 3, thì khoản thắng cược kỳ vọng $E(x)$ và phương sai σ_x^2 là:

$$E(x) = \mu_x = \sum xp(x) = (-5)\left(\frac{37}{38}\right) + (176)\left(\frac{1}{38}\right) = -0.2632$$

$$\sigma_x^2 = \sum (x-\mu)^2\, p(x) = \sum x^2 p(x) - \mu^2$$

$$= (-5)^2\left(\frac{37}{38}\right) + (175)^2\left(\frac{1}{38}\right) - (0.2632)^2 = 830.1939$$

và

$$\sigma_x = \sqrt{830.1939} = \$28.81$$

Vì thế, khoản thắng cược trung bình cho một lần cược \$5 là một khoản thua xấp xỉ 26 xu, và độ lệch chuẩn là \$28.81. Khoản 26 xu tượng trưng cho khoản trung bình mà bạn mất cho “nhà cái”.

Khoản thắng cược cho một đêm là tổng $S = \sum_{i=1}^{200} x_i$ của các khoản thắng hay thua cho hai trăm lần cược mỗi lần \$5. Các đặc trưng của phân phối chọn mẫu cho tổng này được mô tả trong phát biểu của chúng ta về Định lý Giới hạn Trung tâm (xem phần trình bày trong Phần 6.3). Khi độ lớn mẫu *n* là lớn, thì phân phối chọn mẫu của tổng này về các thước đo mẫu sẽ có xu hướng chuẩn hóa. Trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu là

$$\mu s = n\mu \qquad \sigma_x = \sigma\sqrt{n}$$

trong đó μ và σ là trung bình và độ lệch chuẩn của khoản thắng bạc *x* cho một lần cược \$5 duy nhất. Vì thế,

$$\mu_s = (200)(-0.2632) = -\$52.64$$

$$\sigma_s = 28.81\sqrt{200} = 407.43$$

Như vậy, tổng số tiền thắng bạc (hay thua) cho một đêm duy nhất sẽ thay đổi từ - \$1000 (nếu người đánh bạch thua cả 200 lần cược) đến \$35,000 (nếu người đánh bạc thắng toàn bộ 200 lần cược), một khoảng là \$36,000. Khoản thắng bạc trung bình (thực tế là một khoản thua bạc) mỗi đêm là -\$52.64, và phần lớn các khoản thắng bạc hàng đêm sẽ rơi vào (từ Qui tắcThực chứng) trong khoảng

$\mu_s \pm 2\sigma_s$. nghĩa là, - 52.64 ± (2) (407.43)

hay

- \$867.50 đến \$766.22

Dĩ nhiên, khoản thua bạc trong bất kỳ một đêm nào không thể vượt quá $1000. Vì thế, phần lớn những sự thay đổi lớn so với trung bình sẽ là các quan sát ở phần đuôi cao hơn của phân phối này (không chắc là những khoản thắng bạc lớn).

Lưu ý rằng chúng ta biết một điều gì đó về phân phối chọn mẫu của một khoản thắng bạc trong một đêm ở trò chơi rulét, chúng ta hãy cùng khảo sát những kết quả của thí nghiệm Monte Carlo của Daniel Seligman. Chúng ta đồng ý với Seligman rằng thật ngạc nhiên khi biết rằng 7 trong số 365 đêm tạo ra sự thua bạc tổng cộng $1000 tiền cược. Xác suất không có lần thắng bạc nào trong 200 lần cược (đặt cược trong một đêm duy nhất) là ít hơn 0.005, và số trung bình các lần mà sự kiện này sẽ xảy ra trong một tổng số 365 đêm là ít hơn 1.825. Dựa trên một trung bình bằng với 1.825, ta có thể chứng minh rằng sự quan sát 7 đêm này tạo ra một khoản thua bạc $1000 là có khả năng không thể xảy ra rất cao.[+]

Khoản thắng bạch lớn nhất trong một đêm, $1160, nằm ở 2.98 lần độ lệch chuẩn so với trung bình $\mu_s = -52.64$. Điều này là khó có thể xảy ra, nhưng đây là một sự kiện mà có thể diễn ra trong một đêm trong số 365 đêm.

6.7. TÓM TẮT

Trong một tình huống chọn mẫu thực tế, chúng ta rút ra một mẫu ngẫu nhiên *đơn lẻ* gồm *n* quan sát từ một lượng dân số, tính toán một giá trị đơn lẻ của một con số thống kê mẫu, và sử dụng giá trị này để suy ra kết luận về một tham số dân số. Nhưng để giải thích con số thống kê này - để biết con số thống kê tính toán được này có thể được kỳ vọng là sẽ rơi vào khoảng giá trị gần đúng thế nào với tham số dân số này - chúng ta cần phải quan sát cách hoạt động của con số thống kê này trong việc chọn mẫu lặp lại. Như thế, nếu như chúng ta phải lặp đi lặp lại rất nhiều lần qui trình chọn mẫu này, thì phân phối của những giá trị của con số thống kê này được tạo ra bởi thí nghiệm Monte Carlo khổng lồ này sẽ là sự phân phối chọn mẫu (hay xác suất) của con số thống kê đó.

Chương này mô tả các đặc trưng của những phân phối chọn mẫu cho hai số liệu thống kê hữu ích mà chúng ta sẽ sử dụng trong các chương tiếp theo để suy luận ra kết quả về những tham số dân số. Trước tiên, các giá trị trung bình mẫu và tỷ lệ mẫu có phân phối chọn mẫu mà có thể được ước lượng xấp xỉ bởi một phân phối chuẩn tắc khi các kích thước mẫu là lớn. Thứ hai, những phân phối này được tập trung về những tham số dân số tương ứng của chúng. Như vậy, trung bình của phân phối chọn mẫu của trung bình mẫu $\bar{x}$ là trung bình dân số μ, và trung bình của phân phối chọn mẫu của tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ là tỷ lệ dân số *p*. Thứ ba, khoảng rộng của các phân phối này, được đo bằng độ lệch chuẩn của chúng, gảim xuống khi qui mô mẫu tăng lên. Như chúng ta sẽ thấy trong Chương 7, đặc trưng thứ ba này là quan trọng khi chúng ta mong muốn sử dụng một con số thống kê mẫu để ước tính tham số dân số tương ứng của nó. Bằng cách chọn một qui mô mẫu lớn hơn, chúng ta có thể gia tăng xác suất để cho một con số thống kê mẫu sẽ rơi gần vào với tham số dân số này.

BÀI TẬP THÊM

6.33 Xem lại thí nghiệm tung xúc xắc của Phần 6.3, mà ở đó chúng ta đã mô phỏng sự chọn lựa các mẫu với $n = 5$ quan sát và có được một ước lượng xấp xỉ cho phân phối chọn mẫu cho trung bình mẫu. Lặp lại thí nghiệm này, chọn 200 mẫu với độ lớn $n = 3$.

[+] Con số *x* các đêm trong tổng số 365 mà tạo ra một khoản thua cược $1000 sở hữu một phân phối xác suất kép với $n = 365$ và $p = 0.005$. Sử dụng ước lượng xấp xỉ Poisson cho phân phối xác suất kép (Phần 4.3), bạn có thể chứng minh rằng $x = 7$ nằm ở phần lớn bốn độ lệch chuẩn cách xa trung bình $\mu = np = 1.825$.

a Xây dựng phân phối chọn mẫu cho $\bar{x}$. Lư ý rằng phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ cho $n = 3$ không đạt được hình dạng quả chuông mà bạn đã quan sát như trong trường hợp $n = 5$. (Hình 6.3)

b Trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối xác suất của $\bar{x}$, số lượng các điểm xuất hiện khi một con xúc xắc đơn lẻ được tung, là $\mu = 3.5$ và $\sigma = 1.71$. Các giá trị chính xác của trung bình và độ lệch chuẩn của những phân phối xác suất này của $\bar{x}$ dựa vào các mẫu có $n = 3$ là bao nhiêu?

c Tính toán trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu mô phỏng được của phần (a). Liệu những giá trị này có gần sát với các giá trị tương ứng có được trong phần (b).

6.34 Quay lại thí nghiệm chọn mẫu của Bài tập 6.33. Tính trung vị cho mỗi trong số 200 mẫu có độ lớn $n = 3$.

a Sử dụng 200 trung vị để xây dựng biểu đồ tần suất tương đối mà xấp xỉ gần đúng với phân phối chọn mẫu của trung vị mẫu.

b Tính trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu trong phần (a).

c So sánh trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối chọn mẫu này với trung bình và độ lệch chuẩn được tính cho phân phối chọn mậu của $\bar{x}$ trong Bài tập 6.33(b). Số liệu thống kê, trung bình mẫu hay trung vị mẫu nào tỏ ra gần đúng với μ nhất?

6.35 Một dân số có hạn bao gồm bốn yếu tố sau: 6, 1, 3, 2

a Có bao nhiêu mẫu khác nhau có độ lớn $n = 2$ mà có thể được chọn từ dân số này nếu như chúng ta chọn mẫu mà không có thay thế? [*Gợi ý:* chọn mẫu được cho là *không có sự thay thế* nếu một yếu tố không thể được chọn hai lần cho cùng một mẫu.]

b Liệt kê các mẫu khả dĩ với $n = 2$.

c So sánh trung bình mẫu cho mỗi trong số các mẫu đã biết trong phần (b).

d Tìm phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$. Sử dụng một biểu đồ xác suất để vẽ đồ thị cho phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$.

e Nếu tất cả bốn giá trị dân số có khả năng xảy ra ngang bằng nhau, hãy tính giá trị của trung bình dân số μ. Liệu có bất cứ mẫu nào trong phần (b) tạo ra một giá trị $\bar{x}$ bằng đúng với μ không?

6.36 Quay lại Bài tập 6.35. Tìm phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ nếu các mẫu ngẫu nhiên có độ lớn $n = 3$ được chọn *mà không có sự thay thế*. Hãy vẽ đồ thị phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$.

6.37 Quay lại Bài tập 6.35. Tìm phân phối chọn mẫu của trung vị mẫu nếu các mẫu ngẫu nhiên có độ lớn $n = 3$ được chọn *mà không có sự thay thế*. Hãy vẽ đồ thị phân phối chọn mẫu của trung vị mẫu này.

6.38 Định lý Giới hạn Trung tâm hàm ý rằng một trung bình mẫu $\bar{x}$ được phân phối xấp xỉ chuẩn tắc đối với các giá trị lớn của *n*. Giả định rằng một mẫu có độ lớn $n = 100$ được rút ra từ một dân số có trung bình $\mu = 40$ và $\sigma = 4$.

a $E(\bar{x})$ là bao nhiêu?

b Độ lệch chuẩn của $\bar{x}$ là bao nhiêu?

c $P(\bar{x} > 41)$ là bao nhiêu?

6.39 Một cuộc điều tra về các đại lý mua hàng từ 250 công ty công nghiệp đã tìm thấy rằng 25% những người mua hàng ghi nhận rằng các đơn đặt hàng mới đạt mức cao hơn trong tháng Giêng so với các tháng trước đó. Giả định rằng 250 đại lý mua hàng trong mẫu này đại diện cho một mẫu ngẫu nhiên của các đại lý mua hàng của công ty trên toàn nước Mỹ.

a Mô tả phân phối chọn mẫu của $\hat{p}$, tỷ lệ những người mua hàng tại Hoa Kỳ có các mức đặt hàng cao hơn trong tháng Giêng. [*Gợi ý:* Sử dụng $\hat{p}$ để ước lượng xấp xỉ p khi tính toán $\sigma_{\hat{p}}$.]

b Xác suất để cho $\hat{p}$ sẽ khác với p một giá trị lớn hơn 0.01 là bao nhiêu?

6.40 Khoảng thời gian cần thiết để cho một nhà đại lý xe hơi địa phương chạy kiểm tra và bảo dưỡng 5000 dặm đối với một xe hơi mới có phân phối xấp xỉ chuẩn tắc với một giá trị trung bình là 1.4 giờ và độ lệch chuẩn là 0.7 giờ. Giả định rằng bộ phận bảo dưỡng có kế hoạch bảo dưỡng 50 xe cho mỗi ngày làm việc 8 tiếng và rằng để làm việc này thì bộ phận đó phải không được tiêu tốn thời gian bảo dưỡng nhiều hơn con số trung bình 1.6 giờ mỗi chiếc xe. Bộ phận bảo dưỡng sẽ phải làm thêm giờ phụ trội ở mức tỷ lệ bao nhiêu trong tất cả các ngày?

6.41 Mẫu tivi 27 inch mới của Sony là KV-27XBR26 được xếp hạng đầu tiên trong số 22 nhãn hàng và mẫu tivi khác nhau dựa trên các thuộc tính về hiệu suất hoạt động như là chất lượng hình ảnh, chất lượng âm thanh, và sự dễ dàng khi sử dụng ("Ratings: 27-inch TV Sets, (*Xếp hạng các Tivi 27 inch)*," 1994). Tuy nhiên, đây là mẫu tivi đắt giá nhất trong số 22 mẫu, với giá cả bình quân là \$1085 và khoảng giá dao động từ \$1005 đến \$1135.

a Nếu như chúng ta giả định rằng những giá trị dân số này và rằng khoảng giá kia đại diện xấp xỉ cho sáu độ lệch chuẩn, hãy mô tả phân phối chọn mẫu của giá cả bình quân của mẫu tivi Sony này trong một mẫu ngẫu nhiên có $n = 200$ người sở hữu tivi.

b Xác suất để cho trung bình mẫu lớn hơn \$1090 là bao nhiêu?

c Xác suất suất để cho trung bình mẫu nhỏ hơn \$1078 là bao nhiêu? Trên thực tế, bạn sẽ có kết luận gì nếu như trung bình mẫu của bạn là \$1078?

6.42 Theo một báo cáo của Bộ Thương mại Hoa Kỳ ("Is College Worth It (*Đại học có đáng giá không)*," 1994) thì những người tốt nghiệp trung học ở độ tuổi trên 18 làm ra thu nhập trung bình \$17,702 trong năm 1990, trong khi những người có bốn năm học đại học làm ra bình quân \$31,256, gần gấp đôi thu nhập của những người chỉ tốt nghiệp trung học. Giả định rằng một mẫu ngẫu nhiên có $n = 25$ người tốt nghiệp đại học được hỏi ý kiến vào năm 1990 liên quan đến tiền lương của họ và rằng độ lệch chuẩn của tiền lương đối với những người tốt nghiệp đại học là \$1550.

a Trung bình và độ lệch chuẩn của trung bình mẫu $\bar{x}$ là bao nhiêu?

b Bạn có kỳ vọng phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ được phân phối chuẩn tắc hay xấp xỉ chuẩn tắc không? Giải thích lý do.

c Tính xác suất để cho trung bình tiền lương mẫu của những người tốt nghiệp đại học vượt quá \$32,000. Vượt quá \$33,000.

d Bạn sẽ kỳ vọng trung bình mẫu này nằm trong khoảng nào với xác suất cao, ví dụ 95%?

6.43 Với chi phí gia tăng của giáo dục đại học, phần lớn sinh viên dựa vào cha mẹ hay gia đình họ để hỗ trợ tiền bạc trong suốt những năm học đại học của mình. Kết quả của một cuộc điều tra những sinh viên năm thứ nhất vào năm 1993 ("Freshman Statistics (*Số liệu Thống kê Sinh viên năm thứ nhất*)," 1994) cho thấy rằng 86% số sinh viên năm nhất trong cuộc điều tra này nhận được sự trợ giúp tài chính từ cha mẹ hay gia đình. Giả sử rằng chúng ta phải điều tra lớp sinh viên năm thứ nhất tiếp theo bằng cách sử dụng một mẫu có $n = 1000$ sinh viên năm một và rằng 86% là tỷ lệ phần trăm thực tế hiện đang nhận được sự hỗ trợ tài chính từ cha mẹ hay gia đình.

a Mô tả phân phối xấp xỉ cho tỷ lệ mẫu $\hat{p}$ của những người nhận được sự trợ giúp tài chính từ cha mẹ và gia đình.

b Xác suất để cho tỷ lệ mẫu này khác với 0.85 một giá trị không lớn hơn 0.02 là bao nhiêu?

c Bạn có muốn thấy một tỷ lệ mẫu lớn hơn 90% không? Tại sao và tại sao không?

6.44 Thời gian này kéo dài bao lâu trước khi bạn cần phải sửa chữa hay thay thế chiếc tivi của mình? Theo một báo cáo trong tạp chí *Consumer Reports* ("Ratings"27-inch TV Sets, 1994) liên quan đến tỷ lệ phần trăm số tivi đã từng được sửa chữa đối với 15 nhãn hiệu tivi 25-27 inch, thì ba nhãn hiệu hàng đầu là General Electric, Panasonic và JVC. đối với mỗi trong số ba nhãn hiệu này, khoảng 5% số tivi cần phải sửa chữa. Giả định một mẫu ngẫu nhiên có n = 500 người sở hữu một chiếc tivi 25-27 inch nhãn hiệu General Electric được chọn và tỷ lệ những người sở hữu mà các tivi của họ cần sửa chữa được ghi nhận.

a Trung bình và độ lệch chuẩn của tỷ lệ các chiếc tivi cần sửa chữa là bao nhiêu?

b Liệu khoảng $p \pm \sqrt{\frac{pq}{n}}$ có nằm bên trong khoảng giá trị của $\hat{p}$ không? Liệu Định lý Giới hạn Trung tâm có áp dụng được với phân phối của $\hat{p}$ không?

c Xác suất để cho $\hat{p}$ sẽ khác với p một giá trị lớn hơn 0.01 là bao nhiêu?

6.45 Quay lại Bài tập 6.44. Cũng trong báo cáo đó, 10% các loại tivi 24-27 inch nhãn hiệu Zenith cần phải sửa chữa. Giả sử rằng một mẫu ngẫu nhiên gồm n = 100 người sở hữu tivi 24-27 inch nhãn hiệu Zenith được chọn và một tỷ lệ giống vậy các chiếc tivi cần phải sửa chữa được ghi nhận.

a Phân phối xấp xỉ của $\hat{p}$ là như thế nào? Liệu sự xấp xỉ này có tốt hay đơn thuần là phù hợp hay không? Giải thích lý do.

b Xác suất để cho tỷ lệ mẫu này khác với con số 10% một giá trị thấp hơn 5% là bao nhiêu?

Bài tập Sử dụng các Bộ dữ liệu tại http://swlearning.com

6.46 Chọn mẫu ngẫu nhiên được mô tả trong Phần 6.1. Chọn 50 mẫu ngẫu nhiên có độ lớn n = 10 từ dân số N = 317 quan sát về trọng lượng tươi từ bộ dữ liệu B: Broccoli Data (*Dữ liệu về bông cải xanh*), và tính toán $\bar{x}$ cho từng mẫu.

a Xây dựng một biểu đồ cho các giá trị của $\bar{x}$ trong 50 mẫu bạn chọn.

b Tính trung bình và độ lệch chuẩn cho 50 giá trị trung bình mẫu được tìm ra trong việc chọn mẫu ngẫu nhiên này.

c Liệu hình dáng của biểu đồ tần suất của 50 giá trị của $\bar{x}$ có hình dạng gò hay không? Trung bình và độ lệch chuẩn tính được trong phần (b) so sánh ra sao với các giá trị xấp xỉ theo lý thuyết của $\mu_{\bar{x}}$ và $\sigma_{\bar{x}}$ tính toán được từ sự tóm tắt dữ liệu?

6.47 Quay lại Bài tập 6.46 bằng cách sử dụng các mẫu có độ lớn n = 20. Trung bình theo lý thuyết thì vẫn như cũ, nhưng độ lệch chuẩn theo lý thuyết sẽ nhỏ hơn.

6.48 Một thí nghiệm theo kiểu Monte Carlo: trong nghiên cứu điển hình ở Chương 2, chúng ta đã trình bày dữ liệu về các quỹ tương hỗ thị trường tiền tệ. Như là một thí nghiệm, hãy xem lợi suất bảy ngày trong Bảng 2.2 như là một dân số. Mỗi thành viên trong lớp phải chọn một mẫu ngẫu nhiên gồm n = 4 quan sát từ dân số này và tính toán trung bình mẫu $\bar{x}$. (Một qui trình cho việc chọn mẫu ngẫu nhiên được mô tả trong Phần 14.2). Hãy xây dựng một biểu đồ tần suất tương đối cho các trung bình mẫu tính được bởi các thành viên trong lớp. Phân phối tần suất tương đối này của các trung bình mẫu cung cấp cho chúng ta một sự ước lượng gần đúng cho phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ cho các kích thước mẫu n = 4.

a So sánh phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$ của bạn với biểu đồ tần suất dân số tương đối trong Hình 2.30.

b Tính trung bình và độ lệch chuẩn lý thuyết của phân phối chọn mẫu của $\bar{x}$. Trung bình và độ lệch chuẩn của dân số dữ liệu này được cho trong Phụ lục I là μ = 3.7324 và σ = 0.3337. Xác định vị tri của trung bình và khoảng $(\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n})$ dọc theo trục hoành. Liệu trung bình này có nằm gần với trung tâm của phân phối các trung bình mẫu không? Liệu khoảng $(\mu \pm 2\sigma/\sqrt{n})$ có bao gồm hầu hết các trung bình hay không? xấp xỉ 95%?

c Tính toánh trung bình và độ lệch chuẩn của các trung bình mẫu được sử dụng để xây dựng biểu đồ tần suất tương đối. Liệu những giá trị này có gần đúng với các giá trị tìm được cho μ và $\sigma_{\bar{x}}$ trong phần (b)?

6.49 Tham khảo bộ dữ liệu A.

a Chọn ngẫu nhiên 25 mẫu có độ lớn 5 từ danh sách liệt kê tiền lương cho các nam giáo sư và tính toán trung bình cho từng mẫu. Hãy xây dựng một biểu đồ bằng cách sử dụng 25 giá trị trung bình này. Liệu biểu đồ này có xấp xỉ gần đúng với một phân phối chuẩn tắc hay không?

b Lặp lại phần (a) cho tiền lương của nữ giáo sư.

6.50 Tham khảo bộ dữ liệu B.

a Sử dụng biểu đồ về các đường kính phần đầu tối đa, tìm tỷ lệ của các đường kính phần đầu tối đa lớn hơn 10.5 bằng cách sử dụng các tần suất tương đối của tất cả các loại với điểm giữa lớn hơn 10 và chia cho 317, số quan sát. Bây giờ chúng ta sẽ giả định rằng tỷ lệ này đại diện cho một tỷ lệ dân số.

b Chọn 30 mẫu ngẫu nhiên có kích thước 10 đường kính phần đầu tối đa. Với từng mẫu, hãy quyết định tỷ lệ có đường kính phần đầu tối đa lớn hơn 10.5. Xây dựng một biểu đồ cho các tỷ lệ mẫu của bạn. Liệu biểu đồ này có tập trung về giá trị p = 0.19, giá trị tính toán được trong phần (a) cho tất cả các quan sát?

c Tính toán trung bình và độ lệch chuẩn của các giá trị mẫu của $\hat{p}$ tìm thấy trong phần (b). Các giá trị này so với những giá trị theo lý thuyết tìm được khi sử dụng p = 0.19 thì như thế nào?